



Contribution à la modélisation du comportement dissipatif des élastomères chargés : D'une modélisation micro-physiquement motivée vers la caractérisation de la fatigue.

Julie Grandcoin Laneyrie

► To cite this version:

Julie Grandcoin Laneyrie. Contribution à la modélisation du comportement dissipatif des élastomères chargés : D'une modélisation micro-physiquement motivée vers la caractérisation de la fatigue.. Mécanique [physics.med-ph]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2008. Français. NNT : . tel-00326048

HAL Id: tel-00326048

<https://theses.hal.science/tel-00326048>

Submitted on 1 Oct 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE (AIX-MARSEILLE II)

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE II

Discipline : MÉCANIQUE

Option : SOLIDES

présentée et soutenue publiquement

par

JULIE GRANDCOIN

**CONTRIBUTION À LA MODÉLISATION DU
COMPORTEMENT DISSIPATIF DES
ÉLASTOMÈRES CHARGÉS :
D'UNE MODÉLISATION MICRO-PHYSIQUEMENT
MOTIVÉE VERS LA CARACTÉRISATION DE LA
FATIGUE**

Directeurs de thèse :

Adnane BOUKAMEL - Olivier DEBORDES

JURY

| | | |
|----------------|--|------------|
| Mr F. SIDOROFF | Professeur, ECL/LTD | Président |
| Mr R. DESMORAT | Professeur, École Normale Supérieure de Cachan | Rapporteur |
| Mr C. FOND | Professeur, Institut Charles Sadron | Rapporteur |
| Mr P. GODIOT | Ingénieur, EUROCOPTER Marignane | Invité |
| Mr N. SAINTIER | MCF, LAMEFIP-ENSAM | Invité |
| Mr O. DEBORDES | Professeur, École Centrale Marseille | |
| Mr A. BOUKAMEL | Enseignant-Chercheur HDR, École Centrale Marseille | |

UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE (AIX-MARSEILLE II)

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE II

Discipline : MÉCANIQUE

Option : SOLIDES

présentée et soutenue publiquement

par

JULIE GRANDCOIN

**CONTRIBUTION À LA MODÉLISATION DU
COMPORTEMENT DISSIPATIF DES
ÉLASTOMÈRES CHARGÉS :
D'UNE MODÉLISATION MICRO-PHYSIQUEMENT
MOTIVÉE VERS LA CARACTÉRISATION DE LA
FATIGUE**

Directeurs de thèse :

Adnane BOUKAMEL - Olivier DEBORDES

JURY

| | | |
|----------------|--|------------|
| Mr F. SIDOROFF | Professeur, ECL/LTD | Président |
| Mr R. DESMORAT | Professeur, École Normale Supérieure de Cachan | Rapporteur |
| Mr C. FOND | Professeur, Institut Charles Sadron | Rapporteur |
| Mr P. GODIOT | Ingénieur, EUROCOPTER Marignane | Invité |
| Mr N. SAINTIER | MCF, LAMEFIP-ENSAM | Invité |
| Mr O. DEBORDES | Professeur, École Centrale Marseille | |
| Mr A. BOUKAMEL | Enseignant-Chercheur HDR, École Centrale Marseille | |

À mes grand-pères : Jacques et François

Remerciements

J'en arrive (enfin...) aux remerciements, il y a comme un noeud au fond de ma gorge (si si, c'est vrai), une certaine mélancolie à l'approche de mon départ. Remercier tous les gens qui ont compté pour moi durant ces 4 années est une tâche difficile après une aventure aussi enrichissante...

Je ne peux donc démarrer ces remerciements sans une mention "archi" spéciale pour mon directeur de thèse, Adnane Boukamel. Il est un exemple bien plus qu'un directeur de thèse irréprochable. Merci mille fois !

Je tiens aussi à rendre aux Stéphanes ce qui appartient aux Stéphanes : Merci pour leurs conseils, le temps qu'ils m'ont consacré et leur amitié. En avant tacatac, vous irez loin les petits gars!!

Une spéciale "cassdédi" doit être faite aux maîtres incontestés des mots fléchés : au thierry et au barbu qui égaient les midis du plot 6.

Je ne peux non plus oublier la team des co-bureaux, à commencer par Hélène, mon cher Momo et nos sacrés fou-rires, les lève-tards : Rémi et Romain, et le petit dernier : François (le français...pardon). J'en profite pour remercier Jean-Marc, en tant que co-bureau-voisin pour ses conseils et sa bonne humeur.

Un grand merci aussi à Frédéric Mazerolle, qui m'a supporté bien plus longtemps que prévu, à Frédéric Golay et son dynamisme, mais aussi à Bruno Cochelin, Olivier Débordes et Dominique Heriraaaaamm... qui ont suivi mes travaux de près ou de loin. J'aimerais insister sur leur "amour" des sciences.

Je remercie bien évidemment tous les membres de mon jury, particulièrement pour avoir accepté une date de soutenance un 15 juillet. Je tiens à souligner la pertinence de leurs remarques ainsi que leur implication dans mon travail.

Il m'est impossible de conclure ces remerciements sans milles pensées pour mes potesses de Marseille, pour ma petite famille Grandcoin de Champipi qui déchire tout, et en tout et pour tout, pour mon petit africain à moi.

Allez, pardon à ceux que j'ai oublié et il y en a... Bonne chance à tous !

SOMMAIRE

Glossaire

Introduction

Chapitre I

Généralités

| | | |
|-------|--|----|
| I.1 | Cadre industriel | 9 |
| I.2 | Généralités sur les élastomères | 11 |
| I.2.1 | Structure moléculaire et état de la matière | 11 |
| I.2.2 | Les élastomères chargés | 14 |
| I.2.3 | Influence de la température | 19 |
| I.3 | Etat de l'art des modèles de comportement des élastomères chargés | 21 |
| I.3.1 | Cadre thermodynamique : la mécanique des milieux continus en grandes transformations | 21 |
| I.3.2 | Les modèles hyperélastiques | 26 |
| I.3.3 | Les modèles dissipatifs | 28 |
| I.4 | Bilan | 31 |

Chapitre II

L'endommagement des élastomères

| | | |
|--------|---|----|
| II.1 | L'Effet Mullins | 35 |
| II.1.1 | Généralités et caractérisation expérimentale de l'EFFET MULLINS | 35 |
| II.1.2 | Etat de l'art des modèles de l'EFFET MULLINS | 37 |
| II.2 | Endommagement sous chargement monotone | 46 |
| II.2.1 | Observations microscopiques de l'endommagement monotone | 46 |
| II.2.2 | Modèles locaux d'endommagement monotone | 48 |
| II.2.3 | Modèles macroscopiques d'endommagement monotone | 51 |
| II.3 | La fatigue : endommagement sous chargement cyclique | 54 |

| | | |
|--------|---|----|
| II.3.1 | La fatigue à l'échelle micro... | 54 |
| II.3.2 | La fatigue à l'échelle macro... | 56 |
| II.3.3 | Modèles de comportement en fatigue | 59 |
| II.4 | Synthèse de ces observations et modèles d'endommagement | 68 |

Chapitre III

Campagne expérimentale

| | | |
|---------|---|----|
| III.1 | Bilan des travaux antérieurs | 71 |
| III.1.1 | Effet Mullins | 71 |
| III.1.2 | Dépendance du comportement avec la sollicitation | 71 |
| III.1.3 | Influence de la Température | 73 |
| III.2 | Présentation des essais de fatigue | 74 |
| III.2.1 | Moyens expérimentaux | 75 |
| III.2.2 | Campagne expérimentale en traction | 78 |
| III.2.3 | Campagne expérimentale en cisaillement | 81 |
| III.3 | Analyse des résultats expérimentaux | 88 |
| III.3.1 | Remarque générale | 88 |
| III.3.2 | Evolution des essais caractéristiques de cisaillement | 89 |
| III.4 | Conclusion | 92 |

Chapitre IV

Modèles de comportement d'un élastomère chargé

| | | |
|--------|--|-----|
| IV.1 | Des modèles de comportement élasto-dissipatif en grandes transformations | 99 |
| IV.1.1 | Des modèles de comportement généralisés... | 99 |
| IV.1.2 | ...Aux modèles de comportement statistiques | 102 |
| IV.2 | Construction de modèles physiquement motivés | 105 |
| IV.2.1 | Observations microscopiques | 105 |
| IV.2.2 | Hypothèses originelles du modèle | 106 |
| IV.2.3 | Analyse des modèles unitaires | 108 |
| IV.2.4 | Description des modèles statistiques | 111 |
| IV.3 | Deux modèles de comportement non endommagés | 112 |
| IV.3.1 | Le Modèle SHVP1 | 112 |
| IV.3.2 | Le modèle SHVP1_PT | 118 |
| IV.4 | Conclusion | 123 |

Chapitre V

Modélisation de l'endommagement

| | | |
|-------|--|-----|
| V.1 | Evolution du modèle SHVP1_PT avec la fatigue | 127 |
| V.1.1 | Etude de l'influence des paramètres sur le comportement en fatigue | 127 |
| V.1.2 | Identification des paramètres du modèle SHVP1_PT avec la fatigue | 129 |
| V.2 | Proposition d'un modèle d'endommagement en fatigue | 131 |
| V.2.1 | Hypothèses et définitions | 131 |
| V.2.2 | Analyse des évolutions | 132 |
| V.2.3 | Écriture des lois d'évolution des endommagements | 133 |
| V.3 | Vers une modélisation éléments finis du modèles endommageable | 138 |
| V.3.1 | Implémentation Éléments finis | 138 |
| V.3.2 | Simulations numériques des essais de double-cisaillement, en vue d'une validation du modèle d'endommagement | 140 |
| V.4 | Conclusion | 144 |

Conclusion et perspectives

BIBLIOGRAPHIE

Table des figures

Liste des tableaux

Annexe A

Thermodynamique appliquée aux grandes déformations

Annexe B

Equations des modèles de comportement rhéologiques généralisés en grandes déformations

Annexe C

Résultats expérimentaux de fatigue en cisaillement

Annexe D

Mis en evidence d'une durée de vie ultime des éprouvettes de Double-Cisaillement

Annexe E

Algorithme d'identification des paramètres des modèles de comportement

Glossaire

Convention d'écriture

| | |
|-----------------|----------------------------|
| a | Scalaire |
| \vec{a} | Vecteur |
| $\bar{\bar{A}}$ | Tenseur d'ordre 2 |
| $\bar{\bar{1}}$ | Tenseur identité d'ordre 2 |

Mesures des déformations d'un domaine solide continu

| | |
|--------------------------------|---|
| \vec{X} | Position d'un point matériel dans la configuration non déformée. |
| \vec{x} | Position d'un point matériel dans la configuration déformée. |
| \vec{u} | Champ de déplacement. |
| $\bar{\bar{F}}$ | Gradient de la déformation $\bar{\bar{F}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} + \bar{\bar{I}}$ |
| J | Variation locale de volume $J = \det \bar{\bar{F}}$ |
| $\bar{\bar{B}}$ | Tenseur de CAUCHY-GREEN gauche $\bar{\bar{B}} = \bar{\bar{F}} \bar{\bar{F}}^T$ |
| $\bar{\bar{C}}$ | Tenseur de CAUCHY-GREEN droit $\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{F}}^T \bar{\bar{F}}$ |
| $\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{R}}$ | Tenseur droit de déformation pure et Tenseur des rotations, proviennent de la décomposition polaire de $\bar{\bar{F}}$, tels que : $\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{R}} \bar{\bar{U}}$. On a également $\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{U}}^2$ |
| $\bar{\bar{V}}, \bar{\bar{R}}$ | Tenseur gauche de déformation pure et Tenseur des rotations, proviennent de la décomposition polaire de $\bar{\bar{F}}$, tels que : $\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{V}} \bar{\bar{R}}$. On a également $\bar{\bar{B}} = \bar{\bar{V}}^2$ |
| $\bar{\bar{E}}$ | Tenseur de GREEN-LAGRANGE $\bar{\bar{E}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{I}})$ |
| $\bar{\bar{L}}$ | Tenseur des vitesses de déformation $\bar{\bar{L}} = \dot{\bar{\bar{F}}} \bar{\bar{F}}^{-1}$ |
| $\bar{\bar{D}}$ | Tenseur taux de déformation $\bar{\bar{D}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{L}} + \bar{\bar{L}}^T)$ |

Mesures des contraintes d'un domaine solide continu

| | |
|-------------------|--|
| $\bar{\bar{\pi}}$ | Premier tenseur des contraintes de PIOLA-KIRCHHOFF |
| $\bar{\bar{S}}$ | Second tenseur des contraintes de PIOLA-KIRCHHOFF |
| $\bar{\sigma}$ | Tenseur des contraintes de CAUCHY |

Quantités physiques

| | |
|----------|--|
| ρ_0 | Masse volumique mesurée dans la configuration non-déformée |
| ρ | Masse volumique mesurée dans la configuration déformée ($\rho = J^{-1}\rho_0$) |
| ϕ | Dissipation |
| ψ | énergie libre de HELMHOLTZ définie par unité de masse |

Introduction

L'utilisation de polymères de synthèse est aujourd'hui largement développée dans l'industrie mécanique. Les matériaux élastomériques, de part leur grande déformabilité mais aussi leur propriété dissipative, ont une place privilégiée dans la fabrication de pièces sévèrement sollicitées tant mécaniquement que thermiquement. La connaissance du comportement de ce type de matériau est alors nécessaire pour une utilisation optimale et sécurisée de telles pièces. Du fait des sollicitations toujours plus sévères auxquelles ces matériaux sont soumis, l'appréhension du comportement vis-à-vis de la température, du type de sollicitation, mais aussi de la fatigue est toujours d'actualité.

Les travaux que nous menons dans cette thèse s'inscrivent dans le cadre d'une coopération, de plusieurs années, entre le Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille (LMA) et la société EUROCOPTER; coopération visant à comprendre et à modéliser le comportement d'un élastomère silicone chargé de silice, constituant un amortisseur de fréquence de rotor. Les travaux menés jusqu'au ici ont permis le développement de modèles thermo-mécaniques phénoménologiques capables de reproduire très correctement le comportement de ce matériau sur des larges plages de fréquences, de températures et de déformations.

Nous proposons ici, une étude du **comportement en fatigue** d'un élastomère silicone VHDS E1029. L'approche phénoménologique développée dans les travaux antérieurs est associée à des résultats expérimentaux et des observations microscopiques afin de développer des modèles, à la fois phénoménologiques, et "micro-physiquement motivés".

Dans une première partie, nous rappelons brièvement le contexte industriel dans lequel vient s'intégrer ce travail. Un "cahier des charges", regroupant les plages de sollicitations, de températures et de fréquences d'utilisation du matériau, est dressé. Ce premier chapitre permet également de rappeler quelques généralités sur les élastomères chargés ainsi que les bases de la thermodynamique, jusqu'à établir un état de l'art succinct des modèles de comportement non endommagé utilisés aujourd'hui.

Le deuxième chapitre regroupe l'étude de trois types d'endommagement : l'EFFET MULLINS, l'endommagement sous chargement monotone et, enfin, la fatigue cyclique que l'on retrouve dans le cas des élastomères chargés. Pour chaque type d'endommagement, nous présentons d'abord des observations microscopiques de matériaux endommagés, puis des modèles d'endommagement phénoménologiques et micro-physiquement motivés, développés depuis les années 60. Ces modèles permettent l'introduction de notions telles que la cavitation, la nucleation, où l'endommagement continu, qui seront la base des travaux menés dans cette thèse.

Nous exposons, dans la troisième partie de ce mémoire, les résultats que nous avons obtenu lors de deux campagnes expérimentales de fatigue, l'une en traction sur éprouvette H2, l'autre en cisaillement sur des éprouvettes de double-cisaillement avec ménisque. Les campagnes ont regroupé :

- des essais à différents niveaux de fatigue (différents nombres de cycles) et pour différentes configurations (déformations et fréquences)
- après chaque étape de fatigue, toutes les éprouvettes ont subi des essais de caractérisation.

Ces essais ont permis de mettre en avant pour les diverses configurations, deux phénomènes macroscopiques caractéristiques de l'endommagement :

- une **perte de raideur** globale
- une **diminution de la dissipation** avec le nombre de cycles.

Nous rappelons dans cette partie, les difficultés expérimentales rencontrées en traction et en cisaillement, telles que les effets de déformations résiduelles, ainsi que les effets thermiques engendrés par auto-échauffement lors des essais de fatigue.

Parallèlement à ces études expérimentales, nous nous appuyons, dans le quatrième chapitre, sur des observations réalisées au MEB, sur le même matériau fatigué, pour localiser les lieux d'initiation de l'endommagement. Il semble alors que les interfaces entre la matrice élastomérique et les charges soient les sièges de mécanismes d'endommagement, spécialement de décohésions.

À partir de ces résultats microscopiques, nous développons dans le cadre thermodynamique des grandes transformations et des processus irréversibles, deux modèles de comportement statistiques qui associent le comportement hyper-élastique pur où hyper-visco-élastique de la matrice à celui, supposé visco-plastique des différentes populations de charges et d'interfaces.

L'identification des paramètres des modèles de comportement a été réalisée dans un premier temps sur des éprouvettes vierges (non fatiguées) en cisaillement. Le modèle de comportement obtenu à partir du jeu de paramètres identifiés a été validé sur les courbes de traction et a présenté des résultats très satisfaisants pour de larges spectres de sollicitations.

Dans le dernier chapitre, après une étude des paramètres du modèle sur le comportement macroscopique fatigué, deux endommagements sont mis en avant : un endommagement dit statistique caractérisé par une chute des seuils de glissements, qui entraîne la perte de dissipation globale, mais aussi un endommagement de la matrice qui semble démarrer après un certain nombre de cycles et qui caractérise macroscopiquement la diminution de raideur. Ainsi, après ré-identification des paramètres liés aux mécanismes d'endommagement sur les essais de traction (essais les plus homogènes) pour différents niveaux et configurations de fatigue, deux lois d'endommagement basées sur un cumul linéaire mais aussi sur une hypothèse d'isotropie sont développées.

Par ailleurs, et pour conclure, en utilisant les développements déjà réalisés dans le code E.F. ZéBuLoN, le modèle statistique hyper-visco-plastique est implémenté. Le couplage "lâche" de ces développements avec le modèle d'endommagement permet alors la validation de ce dernier, via une confrontation entre les résultats d'essais en double-cisaillement et ceux de la simulation numérique.

CHAPITRE I

Généralités

————— oOo —————

Ce chapitre présente le cadre général de ces travaux de thèse. Le cadre industriel est d'abord succinctement expliqué, afin de comprendre la démarche menée pour réaliser cette étude et de comprendre dans quelles conditions, celle-ci rentre dans la logique industrielle

La deuxième et principale partie de ce chapitre s'orientera autour de l'état de l'art des élastomères. D'abord seront exposés les principales caractéristiques et propriétés des élastomères chargés, puis viendra l'exposé du cadre thermodynamique dans lequel sont définis la plupart des modèles de comportement, ainsi qu'un état de l'art des modèles développés pour décrire le comportement, non endommagé, de ce type de matériau.

————— oOo —————

PLAN DU CHAPITRE I

| | | |
|------------|--|-----------|
| I.1 | Cadre industriel | 9 |
| I.2 | Généralités sur les élastomères | 11 |
| I.2.1 | Structure moléculaire et état de la matière | 11 |
| I.2.2 | Les élastomères chargés | 14 |
| I.2.2.a | Les charges | 14 |
| I.2.2.b | Propriétés mécaniques des élastomères chargés | 16 |
| I.2.3 | Influence de la température | 19 |
| I.3 | Etat de l'art des modèles de comportement des élastomères chargés | 21 |
| I.3.1 | Cadre thermodynamique : la mécanique des milieux continus en grandes transformations | 21 |
| I.3.2 | Les modèles hyperélastiques | 26 |
| I.3.3 | Les modèles dissipatifs | 28 |
| I.4 | Bilan | 31 |

I.1 Cadre industriel

Parmi les nombreuses classes de matériaux que l'on retrouve dans l'industrie des transports, les élastomères, de part leur forte déformabilité et leur propriétés amortissantes, ont largement leur rôle à jouer. Le caractère dissipatif de ces matériaux leur permet d'amortir les chocs et de filter les vibrations, capacités recommandées pour l'utilisation de pièces soumises à des sollicitations extrêmes autant sur le plan statique, dynamique, qu'environnemental (gradient de température brutal par exemple).

La société EUROCOPTER du groupe EADS développe depuis une vingtaine d'années de nombreux concepts d'adaptateurs de fréquence en élastomères. Le développement de ces pièces, toujours lié aux aspects de sécurité, nécessite alors une très bonne maîtrise de leur comportement et de l'évolution de leur endommagement, afin de prédire le plus finement possible leur réponse au cours du temps sous diverses sollicitations.

Le rôle des adaptateurs de fréquence est d'éviter les phénomènes de résonance qui peuvent apparaître lorsque la fréquence propre de traînée d'une pale croise la fréquence de régime nominale de cette même pale (*cf.* MARTINEZ [2005]), ces phénomènes de résonance pouvant causer des dommages conséquents de l'hélicoptère. Ces adaptateurs, aussi appelés adaptateurs de traînée, sont alors situés au niveau des rotors et permettent la dissipation de l'énergie mécanique liée aux mouvements de traînée des pales.

Les premiers adaptateurs élastomériques que l'on retrouve sur les hélicoptères de type « gazelles », sont constitués d'un élastomère cisailé par deux cylindres en acier tel que présenté sur la FIGURE I.1.

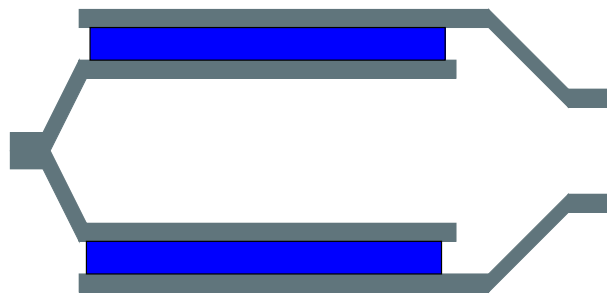


FIGURE I.1 – *Coupe d'un adaptateur de fréquence.*

L'élastomère utilisé actuellement pour la conception des adaptateurs est un mélange synthétique à base de silicone chargé de silice (VHDS E1029) dont le comportement est suffisamment stable en température et suffisamment amortissant pour les sollicitations mécaniques.

Etant donné les caractéristiques de vol des hélicoptères, il est possible de dresser un tableau des spécifications des conditions thermomécaniques des adaptateurs de fréquences qui doit être la base des développements des modèles de comportement et de l'étude de l'endommagement.

| Paramètres de sollicitation | Domaine |
|-------------------------------|----------------------------------|
| Fréquence | $< 30Hz$ |
| Température | $-55^{\circ}C < T < 70^{\circ}C$ |
| Amplitude statique "moyenne" | $< 25\%$ |
| Amplitude dynamique "moyenne" | $< 25\%$ |
| Amplitude statique "maxi" | $< 55\%$ |
| Amplitude dynamique "maxi" | $< 40\%$ |

TABLEAU I.1 – *Enveloppe des sollicitations des adaptateurs des rotors principal et arrière.*

La modélisation du comportement de ces pièces va devoir, de part les plages de sollicitations requises, tenir compte des non-linéarités géométriques et matérielles ainsi que des mécanismes de dissipation de l'élastomère.

Les domaines de sollicitations statiques et dynamiques impliquent l'introduction de modèles de comportement hyper-élastiques où hyper-élasto-dissipatifs. L'évolution de la température requiert une prise en compte du couplage thermo-mécanique dans l'écriture de lois constitutives. Et enfin, une modélisation de l'évolution du comportement vis-a-vis de l'endommagement par fatigue devrait permettre de prévoir et d'améliorer la durée de vie afin de sécuriser l'utilisation et d'optimiser le contrôle de telles pièces.

Ces différents thèmes de recherche, réunis autour de la modélisation, la caractérisation et l'identification du comportement des élastomères chargés font ainsi l'objet de programmes de recherche réalisés en partenariat entre le CNRS et les sociétés EUROCOPTER et PAULSTRA depuis 1991.

Les travaux menés jusqu'ici ont permis de considérer les comportements hyper-élastiques (JAZZAR [1993]), hyper-visco-élastiques (MEO [2000], GABRIELI [1995]) et hyper-élasto-visco-plastiques (MARTINEZ [2005]) qui sont aujourd'hui relativement avancés voir maîtrisés sur des plages de sollicitations données. La prise en compte de modèles statistiques lors de ces travaux a permis une amélioration des modèles de comportement (du fait de la diminution du nombre de paramètres à identifier) mais aussi, la prise en compte de la nécessité de prédire le caractère micro-macro des mécanismes de comportement des élastomères chargés.

Les travaux sur l'endommagement de ces matériaux ont été initiés au sein de notre équipe de recherche par BIKARD [2002] à travers une modélisation phénoménologique mais physiquement motivée de cet endommagement. Ils ont été ensuite poursuivis par COURTOIS [2003] via une série d'observations microscopiques qui seront à la base du présent travail. Ces études nécessitent donc des analyses plus approfondies afin de décrire un modèle d'endommagement basé sur une approche micro-structurale de ces matériaux en corrélation avec les modèles statistiques hyper-élasto-dissipatifs développés précédemment.

I.2 Généralités sur les élastomères

I.2.1 Structure moléculaire et état de la matière

Les élastomères sont donc des matériaux fortement sollicités dans le monde industriel, principalement grâce à leur comportement complexe mais stable sous des conditions extrêmes. Ce comportement macroscopique semble être le fruit d'une structure micro-moléculaire tout aussi compliquée. Nous tentons, dans ce chapitre, d'exposer les principales spécificités de ce comportement.

Tout d'abord, les élastomères font partie de la famille des polymères qui se divise en 3 types : les polymères naturels, les polymères semi-synthétiques réalisés à partir de polymères naturels et enfin les polymères purement synthétiques, fabriqués par des réactions dites de polymérisation ou de polyaddition.

Les polymères se composent de longues chaînes macromoléculaires, figure I.2, constituées par l'enchaînement covalent (par des liaisons covalentes) de "motifs de répétition" identiques ou différents les uns des autres, appelés monomères.

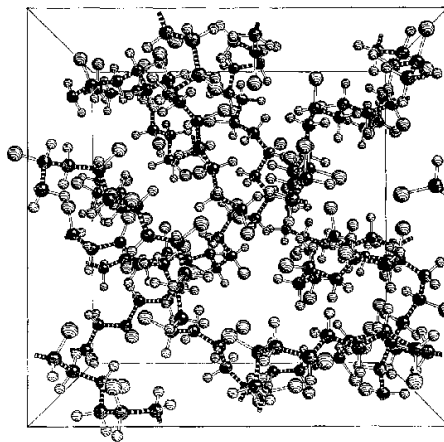


FIGURE I.2 – Organisation spatiale des chaînes polymériques

Les élastomères silicones, par exemple, sont formés de chaînes silicium-oxygène, dont la formule chimique est donnée par : $\text{Si-O-Si-O-Si-O-...}$. Des liaisons internes entre les atomes d'un même monomère peuvent aussi apparaître (sur les atomes de silicium par exemple dans les silicones), créant ainsi une structure réticulée.

Les matériaux polymères se divisent en trois groupes : les élastomères, les thermodurcissables et les thermoplastiques qui se distinguent par leur :

- degré de cristallisation,
- taux de réticulation,
- température de transition vitreuse.

Degré de cristallisation

Les élastomères ont un faible degré de cristallisation. La structure moléculaire des élastomères est fortement désordonnée et flexible, on parle de polymères amorphes, contrairement aux polymères cristallins ou semi-cristallins pour lesquels la structure est hautement organisée et leurs composantes moléculaires solidement entassées. Les différentes liaisons présentes dans les polymères amorphes sont les suivantes :

- des liaisons covalentes (liaisons fortes) dont l'énergie à rupture est de l'ordre de 300 kJ/mol,
- des liaisons faibles, de type VAN DER WAALS, entre des atomes de chaînes très proches ou avec d'autres atomes, dont les énergies à rupture sont de l'ordre de 10kJ/mol.

Du fait du caractère amorphe des élastomères et des liaisons à faible énergie qui se rompent facilement, sous l'effet de sollicitations mécaniques, les chaînes vont glisser les unes par rapport aux autres. Ce phénomène permet ainsi au matériau de pouvoir subir de très grandes déformations, de l'ordre de plusieurs centaines de pourcents, niveau que ne peuvent subir la plupart des matériaux. Par ailleurs, lorsque l'on décharge un élastomère, il demeure une déformation résiduelle au sein du matériau, déformation caractéristique d'un comportement visqueux ou plastique.

Taux de réticulation

Pour réduire ce phénomène de déformation résiduelle, des pontages vont être créés entre les différentes chaînes par un procédé de vulcanisation, conférant ainsi au polymère une structure de réseaux tridimensionnels. Ce procédé (réalisé par exemple par la cuisson d'un mélange de soufre/caoutchouc) permet l'apport d'énergie nécessaire à la création de liaisons entre les monomères, **points de réticulation**, qui entraînent la connexion des polymères et ainsi une cohésion durable du caoutchouc. Ce procédé irréversible fournit par exemple aux élastomères les propriétés d'hyperélasticité qui le caractérisent.

Ainsi, la formulation chimique de ce procédé permet de quantifier le taux de réticulation de l'élastomère et ainsi d'obtenir des matériaux possédant des propriétés différentes, FIGURE I.3. L'introduction d'une quantité trop importante d'agents réticulants entraîne une rigidification du réseau macromoléculaire bloquant ainsi les glissements entre chaînes d'où une perte de souplesse du matériau, mais par contre une meilleure résistance à la rupture.

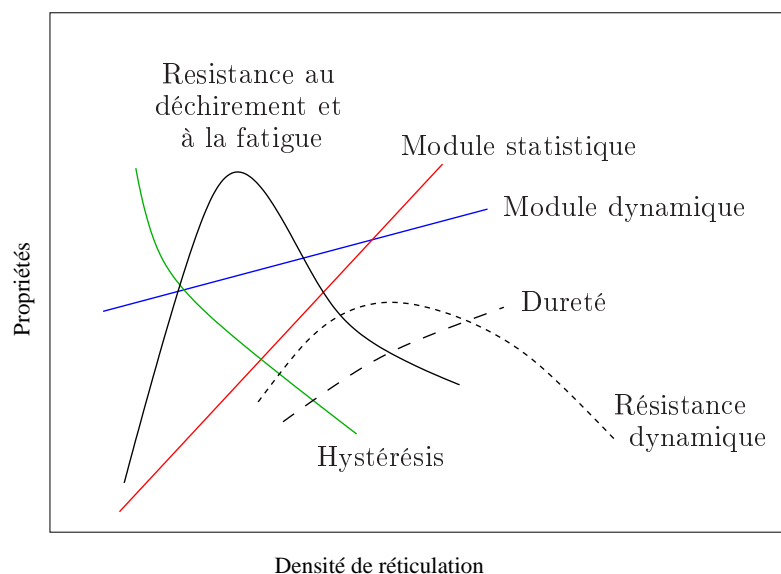


FIGURE I.3 – *Propriétés physiques et mécaniques en fonction de la densité de réticulation*, BOUCHEREAU (1997)

Température de transition vitreuse

Un des plus importants paramètres caractéristiques d'un élastomère est sa **température de transition vitreuse**. Cette grandeur représente le seuil autour duquel le matériau passe d'un état vitreux (plastique et fragile) à un état caoutchoutique (grande déformabilité). Dans le cas des élastomères, cette température de transition vitreuse est basse, comprise entre -30°C et -120°C ce qui confère à ces matériaux un état caoutchoutique à température ambiante. La FIGURE I.4 représente l'évolution du module d'élasticité et de l'angle de perte en fonction de la température et permet de distinguer les différents états de la matière.

L'état vitreux (que l'on retrouve en dessous de cette température), qui est caractérisé par une grande rigidité, semble être le fruit de fortes interactions entre chaînes macromoléculaires vis-à-vis de l'énergie d'agitation thermique. C'est, par exemple, l'état d'objets en plastiques durs tels que le polystyrène à température ambiante.

Autour et au delà de cette température T_g , le rapport énergie d'agitation thermique sur énergie d'interactions moléculaires augmente, les macromolécules glissent et tournent alors plus facilement entre elles. Le matériau est d'abord élastique (phase de transition), puis visco-élastique (état caoutchoutique) et finalement uniquement visqueux (écoulement) si l'on augmente encore la température.

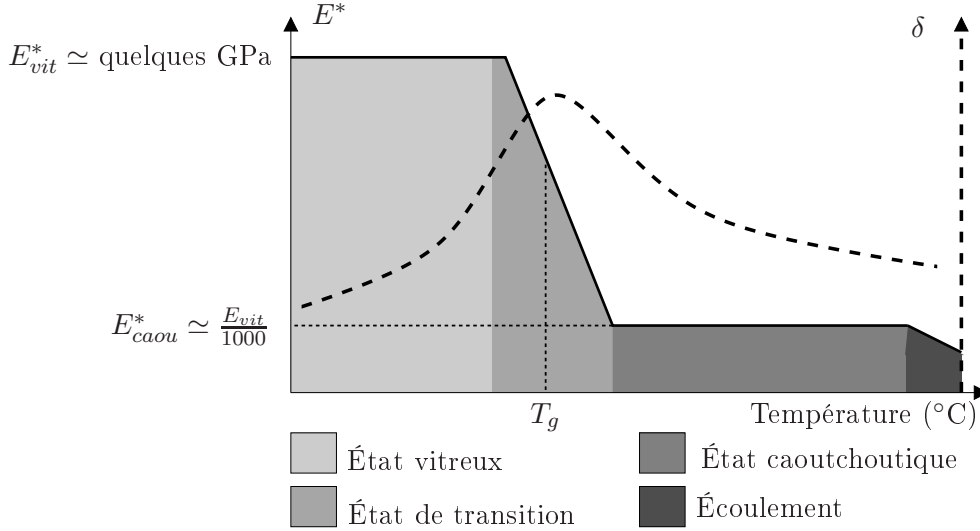


FIGURE I.4 – Evolution du module dynamique et de l'angle de perte en fonction de la température.

Les caractéristiques des élastomères dépendent donc fortement des spectres de température dans laquelle ils sont utilisés.

I.2.2 Les élastomères chargés

Nous venons de voir que le comportement d'un élastomère dépend à la fois de sa mise en oeuvre (microstructure, taux de réticulation) mais aussi de la plage de température pour laquelle il est employé. A partir de là, en se plaçant autour d'une température où l'état de la matière reste caoutchoutique, le comportement de l'élastomère est dit élasto-dissipatif. D'un point de vue pratique, des facteurs tels que la résistance à la rupture ou à la fatigue sont primordiaux lors de l'utilisation industrielle de ces matériaux. Ainsi, dans le but d'améliorer les performances des élastomères en terme de rigidité et de résistance, on réalise un renforcement du matériau par incorporation de charges. Nous allons dans cette partie à la fois définir les types de charges et l'influence de ces charges sur le comportement des matériaux.

I.2.2.a Les charges

Il existe différents types de charges : peu renforçantes (tel que le talc par exemple), semi renforçantes et renforçantes (noir de carbone ou silice).

La qualité d'introduction de charges dans un élastomère va dépendre principalement de trois paramètres propres aux charges :

- la **structure** qui est directement liée à la taille des particules. On observe soit des agrégats de charges, qui sont indivisibles et qui découlent du regroupement de charges lors de la fabrication des particules, soit des agglomérats de charges : regroupement d'agrégats qui sont destructibles sous sollicitations (cf FIGURE I.5)
- la **surface spécifique** qui est la surface développée de la charge par unité de masse.
- l'**activité chimique de surface** qui détermine les interactions entre les charges et la matrice élastomérique. On peut noter que pour les charges de silice, des traitements de surface des charges sont nécessaires pour une bonne fixation de ces charges sur la matrice.

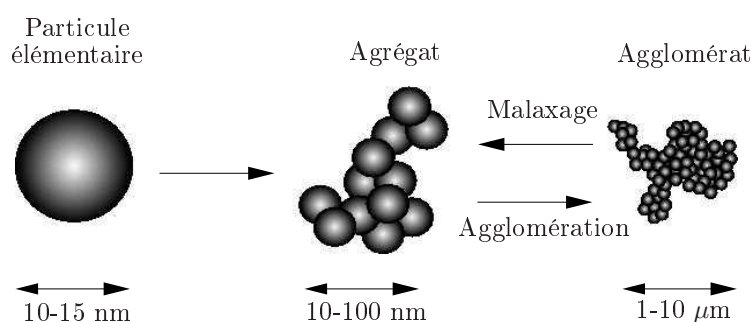


FIGURE I.5 – Les différentes échelles de taille des charges

A partir de ces trois caractéristiques, on comprend la pertinence du choix du type de charges et on note l'importance de la qualité de la mise en oeuvre des élastomères, qui conditionne les propriétés du matériau final.

Avant de passer à l'étude de l'influence des charges sur le comportement mécanique global des élastomères chargés, il faut mettre en avant un phénomène important des élastomères qu'est le décalage de la température de transition vitreuse par l'introduction de charges. Des résultats, plus ou moins contradictoires, ont été publiés à ce sujet RAMIER [2004], BERRIOT *et al.* [2002]. Il s'avère aujourd'hui, qu'en l'absence d'agent de couplage (que l'on rajoute dans certain cas pour améliorer l'interaction charge/matrice), les charges ont peu d'influence sur la transition vitreuse. Au contraire, dans le cas où l'on en introduit, c'est le cas par exemple avec les charges de silice, il apparaît un déplacement de cette transition. Ce phénomène s'explique par l'apparition de zones vitreuses au niveau des interfaces entre les charges de silice et la matrice, zones dans lesquelles la mobilité de la matrice est réduite.

Cette particularité, liée d'abord à une mauvaise interaction des charges de silice au sein de la matrice, va conditionner le comportement global de ces matériaux élastomériques.

I.2.2.b Propriétés mécaniques des élastomères chargés

L'élasticité

Les charges ont un effet fortement renforçant sur le comportement des élastomères. Les résultats expérimentaux de HALPIN et BUECHE [1964] permettent d'observer la rigidification du matériau avec le taux de charge (cf FIGURE I.6).

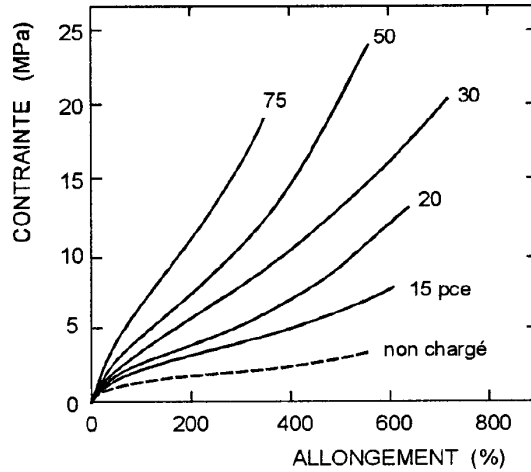


FIGURE I.6 – *Effet du taux de charges sur la rigidité d'un élastomère (HALPIN et BUECHE [1964]).*

D'un point de vue mésoscopique, les charges apparaissent comme des noeuds qui rendent difficile l'étirement des chaînes macroscopiques lors d'une sollicitation, engendrant ainsi une augmentation de la rigidité globale.

Pour interpréter ce phénomène de rigidification, plusieurs modèles ont été mis en oeuvre. Les premiers se sont inspirés de l'effet hydrodynamique de charges dans un fluide, ce qui a d'abord conduit à une définition d'une viscosité fonction de la fraction volumique de charges, qui a été ensuite étendue au module d'élasticité. Ces formules, applicables aux milieux très visqueux, ont plus tard été améliorées en tenant compte des interactions charge/charge, puis en prenant en compte un facteur de forme " f " des différentes charges (GUTH [1945]) :

$$E = E_0(1 + 0.67f\phi + 1.62f^2\phi^2) \quad (\text{I.1})$$

avec E_0 est le module élastique sans charge et ϕ la fraction volumique de charge. Il faut noter cependant que cette loi s'applique dans le cas d'interactions fortes, pour un taux de charges élevé.

Une méthode plus récente se base sur le fait que cette rigidification puisse être due aux interactions charge/matrice, c'est le cas par exemple des théories développées par LEBLANC [2002] ou BOKOBZA [2002] qui définissent le module élastique d'un élastomère chargé par :

$$G = G_0XY \quad (\text{I.2})$$

où G_0 représente le module d'un élastomère non chargé et où l'évolution de X découle de la théorie de GUTH [1945] pour une inclusion noyée dans un milieu visqueux (I.1) alors que le facteur Y traduit l'interaction entre la matrice et les charges.

La viscosité

On peut rendre compte expérimentalement du comportement visqueux d'un matériau par des essais de relaxation. Déjà en 1947, MULLINS [1947] établissait que les charges ont une influence considérable sur la relaxation. ROBISSON [2000] a de même montré l'influence du taux de charges sur la relaxation et a constaté que le taux de relaxation d'un matériau chargé est nettement plus important que celui d'un élastomère non chargé.

MARTINEZ [2005] a comparé le comportement sous chargement cyclique d'un matériau non chargé et d'un matériau chargé. Il a mis en évidence à la fois une augmentation de la raideur dynamique mais aussi une augmentation de la dissipation au cours d'un cycle. Ces résultats sont présentés sur la FIGURE I.7.

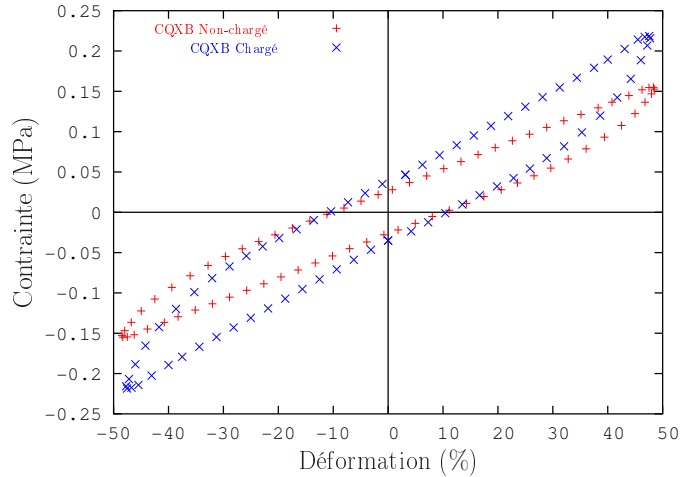


FIGURE I.7 – Evolution de la réponse en cisaillement suivant le matériau pour un essai cyclique triangulaire d'amplitude 50% et de vitesse de déformation $0.15s^{-1}$, MARTINEZ [2005].

D'un point de vue mésoscopique et de façon simpliste, les charges induisent des mécanismes de glissements visqueux entre charges et chaînes mais aussi entre charges elles-mêmes. Ces phénomènes de glissement entraînent une augmentation de la dissipation.

La plasticité

Certains auteurs tels que LION [2000], MIEHE et KECK [2000], CANTOURNET [2002] considèrent qu'une partie de la dissipation des élastomères est liée à un phénomène non visqueux, qu'ils relient soit à de la plasticité, soit à des phénomènes de frottement interne.

Cette approche découle du fait que l'on peut observer, après relaxation, des comportements hystérétiques qui sont indépendants de la vitesse de déformation. MIEHE et KECK [2000] mettent en évidence ce phénomène sur la FIGURE I.8 qui représente un essai expérimental de 13 cycles, à amplitudes de déformation statique et dynamique fixées, le dernier cycle étant interrompu par 20 périodes de relaxation. Tout l'essai est réalisé à vitesse de déformation constante de $5,4 \cdot 10^{-2} s^{-1}$. D'un point de vue mésoscopique, les auteurs expliquent ce phénomène par des mécanismes de glissements irréversibles entre les charges.

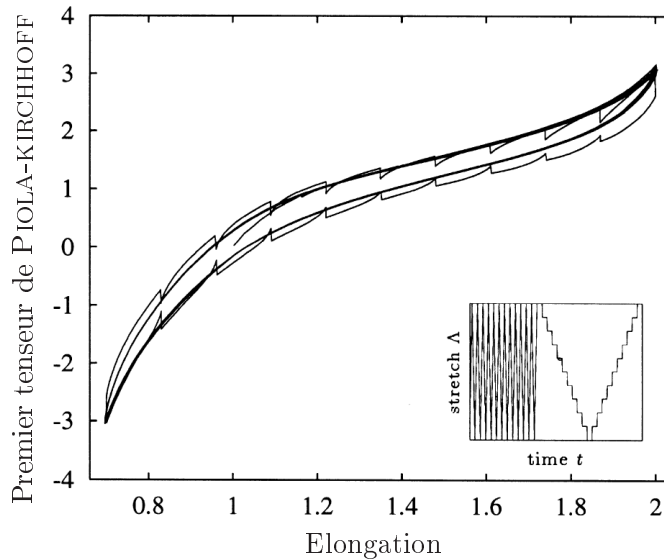


FIGURE I.8 – *Essai expérimental mettant en évidence une partie dissipative non dépendante de la vitesse de déformation (MIEHE et KECK [2000])*

L'effet PAYNE : un effet des charges sous sollicitations cycliques

L'effet PAYNE (1971) se traduit par la diminution de la rigidité lors de l'augmentation de l'amplitude de déformation d'un essai cyclique. Ce phénomène est directement lié à la non linéarité du comportement des élastomères chargés.

Les courbes FIGURE I.9 mettent en évidence à la fois l'influence du taux de charges sur l'effet Payne mais aussi l'évolution non linéaire du module et du facteur de perte δ en fonction de l'amplitude de déformation. L'effet Payne augmente ainsi avec le taux de charge.

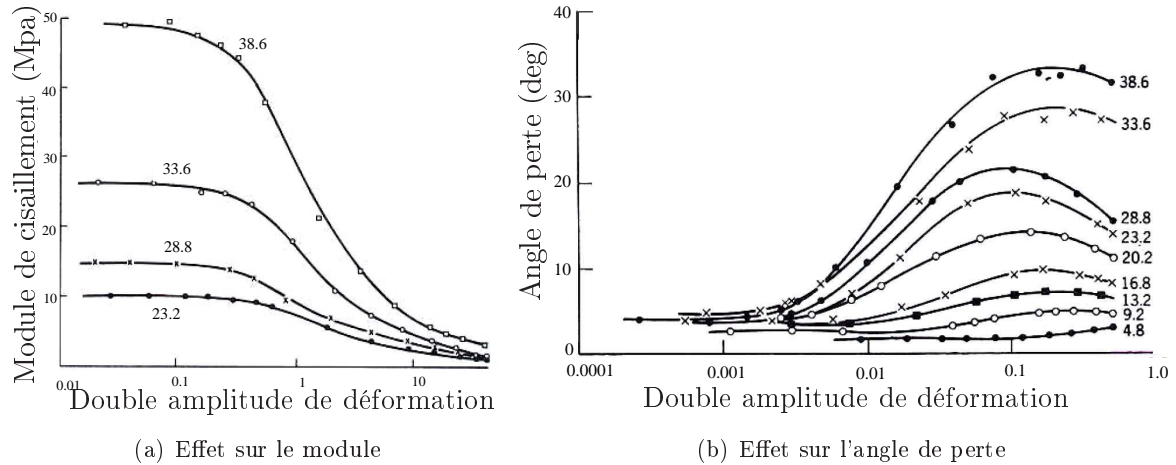


FIGURE I.9 – *Effet du taux de charges sur l'effet Payne d'après RAMIER [2004]*

RAMIER [2004] montre aussi, que plus la dispersion des charges dans la matrice est homogène, plus l'effet Payne est atténué.

A l'échelle des charges, l'effet PAYNE est interprété par des mécanismes de décohésion au sein des agglomérats, ainsi qu'au niveau des interfaces charges-matrice, ces mécanismes étant accentués par l'augmentation de l'amplitude de déformation.

I.2.3 Influence de la température

Les élastomères, chargés ou non, sont des matériaux dont le comportement dépend fortement de la température. La FIGURE I.4 du § I.2.1, implique que la plage de températures, dans laquelle une pièce élastomérique est sollicitée, est déterminante pour définir son comportement en service. Etant données les conditions d'utilisation sévères sous lesquels sont sollicités ces matériaux (*cf.* § I.1), une connaissance fine de l'évolution de leur comportement avec la température est cruciale pour une utilisation sécurisée des pièces.

De nombreux auteurs mettent en évidence expérimentalement l'influence de la température sur le comportement dissipatif des élastomères. LION [1997] montre que plus la température est basse, plus l'élastomère devient dépendant de la vitesse de sollicitation et que l'évolution du comportement due à une variation de température d'un tel matériau, résulte soit d'échanges avec le milieu extérieur, soit d'une production interne de chaleur.

MARTINEZ [2005] a réalisé des essais cycliques et de relaxation à différentes températures sur des élastomères. Les résultats qu'il obtient, FIGURE I.10 mettent en évidence un **assouplissement global** ainsi qu'une **perte de dissipation** avec l'augmentation de la température.

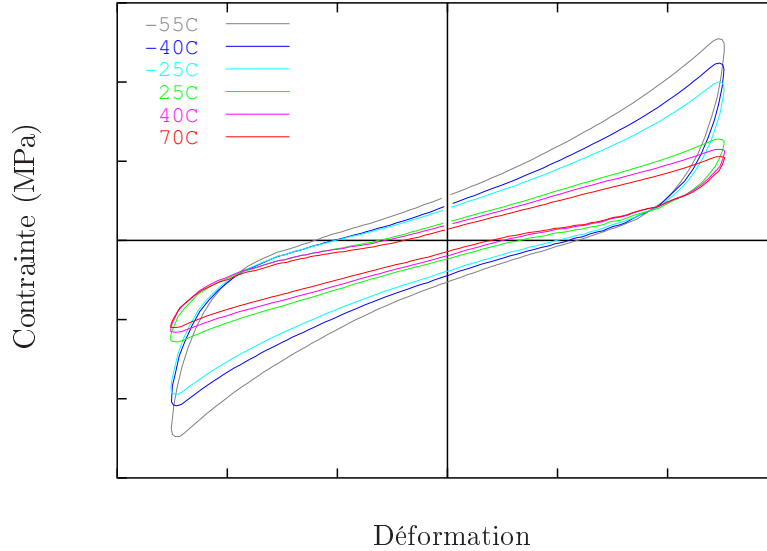


FIGURE I.10 – Observation de l'influence de la température sur les essais cycliques triangulaires de double cisaillement tels que $\gamma_{max} = 50\%$ et $\dot{\gamma} = \pm 10s^{-1}$.

Cette campagne expérimentale lui a permis de développer un modèle rhéologique de comportement où les paramètres suivent une loi non linéaire de type **ARRHENIUS**, sur une plage de température allant de $-55^{\circ}C$ à $70^{\circ}C$.

REMARQUE I.1

Nous tenons ici à pointer du doigt l'influence de la température sur l'évolution du comportement de ces matériaux, influence non négligeable étant donnés les conditions d'utilisation admises. Dans la suite, nous développons un modèle qui ne tient pas compte de ce couplage mais dont tous les paramètres sont identifiés à une température fixée. Nous traitons dans la partie expérimentale, les difficultés engendrées par l'auto-échauffement de l'éprouvette lors des essais de fatigue cyclique. □

I.3 Etat de l'art des modèles de comportement des élastomères chargés

La modélisation d'un comportement, quel qu'il soit, passe par la description de l'état de la matière, donc par la construction d'une relation entre contrainte et déformation, représentant le plus fidèlement possible la réponse à une sollicitation d'un matériau, en tout point d'un système. Dans le cas des élastomères, la modélisation doit tenir compte des mécanismes tels que les non-linéarités géométriques et matérielles, la dissipation et la forte dépendance avec la température que nous venons de décrire.

Le développement du cadre thermodynamique dont découle cette relation entre contrainte et déformation appelée **loi de comportement** est présenté dans une première partie. Le formalisme thermodynamique lié aux grandes déformations que nous utilisons dans cette étude, est proposé en annexe A. L'objectif de cette partie est essentiellement de réexpliquer ce cadre en déformation finie afin de préciser les notations que nous aurons à utiliser par la suite.

Un état de l'art de modèles phénoménologiques et micro-physiquement motivés de comportement hyper-élastiques ainsi que des modèles élasto-dissipatifs sont présentés ensuite.

I.3.1 Cadre thermodynamique : la mécanique des milieux continus en grandes transformations

La démarche menée pour écrire les lois de comportement dans un cadre thermodynamique en transformation finie se base sur une méthode analogue à l'approche en petites déformations. Nous présentons le premier et le second principes de la thermodynamique en configuration eulérienne afin d'obtenir l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEIM qui sera la base de nos études.

On considère alors un solide de volume Ω dans sa configuration initiale C_0 . Ce solide se déforme et occupe, dans la configuration actuelle C_t , le volume ω . On définit alors le gradient de la transformation $\bar{\varphi}$ telle que pour tout vecteur $d\vec{X}$ de la configuration initiale, son application linéaire tangente dans la configuration actuelle soit $d\vec{x} = \bar{F}d\vec{X}$.

On définit à partir de la figure I.11 :

- $\partial\Omega_u$ et $\partial\omega_u$, les surfaces des domaines respectifs Ω et ω sur lesquelles sont appliquées les conditions aux limites cinématiques $\vec{u} = \vec{u}_0$,
- $\partial\Omega_F$ et $\partial\omega_F$ les surfaces des domaines respectifs Ω et ω sur lesquelles sont appliquées les densités surfaciques de force \vec{T} et \vec{t} ,
- δ un élément de volume de la configuration actuelle, image de D , sur lequel sont exercés à travers $\partial\delta$, les efforts de cohésion τ .

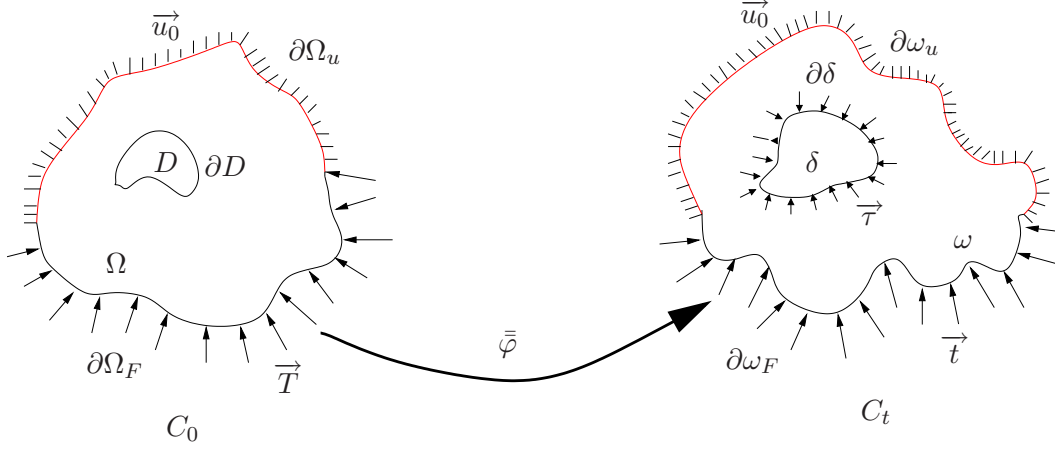


FIGURE I.11 – Conditions limites dans les configurations initiale et actuelle.

• Premier principe : conservation de l'énergie

Il se traduit, comme dans le cas des petites perturbations, de la conservation de l'énergie totale E . Il postule que l'énergie d'un système est égal à la somme des forces extérieures imposées et à la quantité de chaleur reçue :

$$\frac{dE}{dt} = P_{ext} + \mathfrak{Q} \quad (\text{I.3})$$

avec :

- $E = \int_{\omega} \rho e dv$, avec E énergie interne et e la densité spécifique d'énergie interne, ρ représente la masse volumique à l'instant actuel,
- P est la puissance des efforts intérieurs, elle est déduite du principe des puissances virtuelles.

On peut alors écrire à partir du formalisme en grandes déformations décrit en annexe A. :

$$-P = \int_{\omega} \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{D}} dv$$

- et \mathfrak{Q} représente la puissance de chaleur reçue :

$$\mathfrak{Q} = \int_{\omega} \rho r dv - \int_{\delta\omega} \vec{q} \cdot \vec{n} ds$$

r est la puissance spécifique de chaleur recue et $\vec{q} \cdot \vec{n}$ le flux de chaleur perdu à travers $\delta\omega$

Ainsi, on obtient l'expression de la conservation de l'énergie en formulation eulérienne :

$$\rho \dot{e} = \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{D}} + \rho r - \text{div}_x \vec{q} \quad (\text{I.4})$$

• Second principe : Inégalité de CLAUSIUS-DUHEIM

Ce principe postule l'existence de l'entropie S du système. Pour un système non adiabatique, ce second principe s'écrit : $\dot{S} \geq \frac{\mathfrak{Q}}{T}$ avec T la température.

On peut écrire le second principe sous forme locale :

$$\rho \dot{s} \geq \rho \frac{r}{T} - \text{div}_x \frac{\vec{q}}{T} \quad (\text{I.5})$$

En postulant l'existence d'un potentiel d'énergie libre de Helmholtz ψ , dépendant des variables thermodynamiques, tel que $\psi = e - Ts$ et en combinant le premier et le deuxième principe de la thermodynamique, on obtient **l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEIM**

$$\phi = -\rho(\dot{\psi} - s\dot{T}) - \frac{1}{T} \overrightarrow{\text{grad}}_x T \cdot \overrightarrow{q} + \bar{\sigma} : \bar{D} \geq 0 \quad (\text{I.6})$$

On peut décomposer la dissipation ϕ en deux parties telles que $\phi = \phi^{int} + \phi^T$ avec :

- $\phi^{int} = -\rho(\dot{\psi} - s\dot{T}) + \bar{\sigma} : \bar{D}$ est la dissipation intrinsèque due aux irréversibilités mécaniques,
- $\phi^T = -\frac{1}{T} \overrightarrow{\text{grad}}_x T \cdot \overrightarrow{q}$ est la dissipation thermique.

C'est à partir de la dissipation intrinsèque que découle la loi de comportement dans le cas isotherme. On voit alors qu'en absence d'effets thermiques, l'énergie libre est confondue avec l'énergie interne et que la construction d'une loi de comportement nécessite au préalable la définition de la fonction ψ et de la dissipation intrinsèque ϕ^{int} .

• Description et formulation de comportement

SIDOROFF [1982] a démontré la dépendance de la loi de comportement avec l'histoire des transformations subies par le solide en chaque point matériel. Cette dépendance entraîne une multiplication des données nécessaires à la résolution du problème. Afin de simplifier cette description de l'évolution de l'état de la matière, l'hypothèse de **l'état local** défini ci-dessous permet de limiter le problème :

La connaissance en un point d'un certain nombre de variables permet de complètement déterminer l'état thermodynamique en ce point. Les dérivées par rapport au temps de ces variables n'interviennent pas dans la définition de l'état, l'évolution sera donc considérée comme une succession d'états d'équilibre. (LEMAÎTRE et CHABOCHE [1996])

Ainsi, le nombre et le choix de ces variables conditionnent la description des phénomènes thermomécaniques. On distingue deux types de variables d'état : les variables observables, imposées par le formalisme de la thermomécanique, décrivant les phénomènes réversibles, ainsi que les variables internes liées aux mécanismes dissipatifs, qui permettent de prendre en compte l'histoire de la sollicitation.

Le deuxième point sur lequel il faut s'attarder est le principe d'**objectivité** : la loi de comportement ne doit être attachée à aucun référentiel, où autrement dit, tout mouvement de corps rigide ne doit engendrer aucun changement de la loi de comportement. La définition de l'objectivité est différente suivant la configuration dans laquelle la loi est décrite. Pour une description lagrangienne des phénomènes, l'objectivité de cette loi est évidente : les grandeurs lagrangiennes sont exprimées dans le repère initial, immobile quelque soit le référentiel d'étude. Ceci implique alors que toute loi définie à partir de grandeurs lagrangiennes est elle-même objective.

Au contraire, si les variables sont décrites en formulation eulérienne, étant donnée la mobilité du repère dans lequel elles sont définies, l'objectivité de la loi de comportement prend tout son sens. SIDOROFF [1982] considère dans ce cas une deuxième configuration C_t^* , définie par une rotation appliquée à C_t et décrit les égalités que doivent vérifier les grandeurs pour devenir objectives : cf. tableau I.2.

| Description | Tenseur d'ordre 1 | Tenseur d'ordre 2 |
|--------------|---|---|
| Eulérienne | $\vec{u}^* = \bar{\bar{R}} \cdot \vec{u}$ | $\bar{\bar{a}}^* = \bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{a}} \cdot \bar{\bar{R}}^T$ |
| Lagrangienne | $\vec{U}^* = \vec{U}$ | $\bar{\bar{A}}^* = \bar{\bar{A}}$ |
| Mixte | $\vec{U}^* = \bar{\bar{R}} \cdot \vec{U}$ | $\bar{\bar{A}}^* = \bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{A}}$ |

TABLEAU I.2 – Tableau des égalités définissant l'objectivité d'une grandeur suivant la description extrait de LAHELLEC [2001]

Pour finir quant à l'étude des lois de comportement des matériaux de type élastomères, il faut tenir compte de l'**isotropie** de ces lois, c'est à dire de leur invariance par changement de directions de sollicitation. Ceci implique alors que ψ soit une fonction isotrope des variables d'états.

Ainsi, à partir de l'hypothèse de l'état local, en tenant compte du principe d'objectivité et en choisissant les variables d'état observables : T la température, $\bar{\bar{B}}$ le tenseur d'EULER ALMANZI et n variables internes notées $\alpha_{i=1..n}$, on arrive à l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEIM dans le cas isotrope :

$$\phi = (\bar{\sigma} - 2\rho\bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}}) : \bar{\bar{D}} - \rho(s + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} \bullet \dot{\alpha}_i - \frac{1}{T} \overrightarrow{grad_x T} \cdot \vec{q} \geq 0 \quad (I.7)$$

On note par le symbole \bullet le produit contracté à l'ordre nécessaire pour obtenir une dissipation, soit un scalaire.

Apparaissent-ainsi les forces thermodynamiques associées aux variables flux, telles que leur produit (tensoriel, vectoriel ou scalaire) soit homogène à une dissipation.

On note $\mathfrak{F}_\sigma = \bar{\sigma} - 2\rho\bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}}$, la force thermodynamique associée à $\bar{\bar{D}}$ et \mathbf{X}_i celles associées aux α_i avec $\mathbf{X}_i = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i}$.

La prise en compte de l'incompressibilité, caractéristique importante des élastomères chargés, se fait par l'introduction de la condition : $J = Det(\bar{\bar{F}}) = 1$. Ainsi $\dot{J} = J\bar{\bar{D}} : \bar{\bar{1}} = 0$, ce qui implique la nullité de la trace du tenseur taux de déformation $\bar{\bar{D}}$. La prise en compte de cette condition d'incompressibilité se fait généralement par l'introduction d'un mutliplicateur de Lagrange assimilable à une pression hydrostatique.

La thermodynamique ne traite finalement que les parties déviatoriques, les parties sphériques ne sont pas accessibles par la loi de comportement. Cette nouvelle inconnue « pression hydrostatique » ne peut être trouvée que par les équations d'équilibre.

Ainsi, dans le cas d'un matériau isotrope incompressible, l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEIM prend la forme :

$$\begin{cases} \phi^{int} = [\mathfrak{F}_\sigma]^D : \bar{\bar{D}} - \rho(s + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} - \mathbf{X}_i \bullet \dot{\alpha}_i \\ \phi^T = -\frac{\overrightarrow{grad_x T}}{T} \cdot \vec{q} \end{cases} \quad (I.8)$$

avec $[\bar{\bar{\mathfrak{A}}}]^D$ la partie déviatorique de $\bar{\bar{\mathfrak{A}}}$.

La prise en compte des comportements dissipatifs dans ces modèles se fait par l'introduction d'un pseudo-potentiel de dissipation dépendant du taux de déformation totale et des taux des variables internes (appelées variables flux) : $\varphi(\bar{\bar{D}}, \vec{q}, \dot{\alpha}_i)$. Pour que le second principe soit vérifié (positivité ou égalité de la dissipation), le pseudo-potentiel doit être une fonction continue, convexe, positive et nulle à l'origine dans l'espace des variables flux. La dissipation totale se met donc sous la forme suivante :

$$\phi = \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\bar{D}}} : \bar{\bar{D}} + \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{\alpha}_i} \bullet \dot{\alpha}_i + \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{q}} \cdot \vec{q} \quad (I.9)$$

Dans le cadre des **matériaux standards généralisés**, ce potentiel, aussi utilisé sous la forme de sa transformée de LEGENDRE-FENCHEL φ^* , traduit l'évolution des forces thermodynamiques en fonction de leur variable flux associée :

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial\varphi^*}{\partial\mathbf{X}_i} \quad (I.10)$$

Dans le cas des **matériaux non standards généralisés**, une fonction \mathfrak{F} est intégrée au modèle afin de décrire l'évolution des variables internes telle que $\dot{\alpha}_i = \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathbf{X}_i}$.

Le découpage de la dissipation permet d'écrire la forme I.9 en fonction de deux pseudo-potentiels indépendants : $\varphi^{int}(\bar{\bar{D}}, \dot{\alpha}_i)$ et $\varphi^T(\vec{q})$. Ainsi, en conjuguant les équations I.8 et I.9, les lois complémentaires prennent, pour un matériau isotrope incompressible, les formes suivantes :

$$[\mathfrak{F}_\sigma]^D = \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial\bar{\bar{D}}} \quad ; \quad \rho(s + \frac{\partial\psi}{\partial T}) = 0 \quad ; \quad \mathbf{X}_i = \rho \frac{\partial\psi}{\partial\dot{\alpha}_i} = \frac{\partial\varphi^{int}}{\partial\dot{\alpha}_i} \quad ; \quad -\frac{\overrightarrow{grad_x T}}{T} = \frac{\partial\varphi^T}{\partial\vec{q}} \quad (I.11)$$

Somme toute, la modélisation du comportement d'un matériau passe par trois étapes :

1. la définition des variables d'états $\bar{\bar{B}}, T, \alpha_i \dots$,
2. le choix d'une forme d'énergie libre de HELMOLTZ ψ ,
3. la formulation de pseudo-potentiels de dissipation φ^{int} et φ^T où de leur transformée de LEGENDRE-FENCHEL

I.3.2 Les modèles hyperélastiques

Nous présentons dans cette partie quelques formes des énergies libres spécifiques les plus utilisées pour modéliser le comportement des matériaux élastomériques, isotropes et incompressibles. Nous présentons sur la figure I.12 la réponse à une rampe de déformation sur un essai de traction qui met en évidence le caractère non linéaire du comportement.

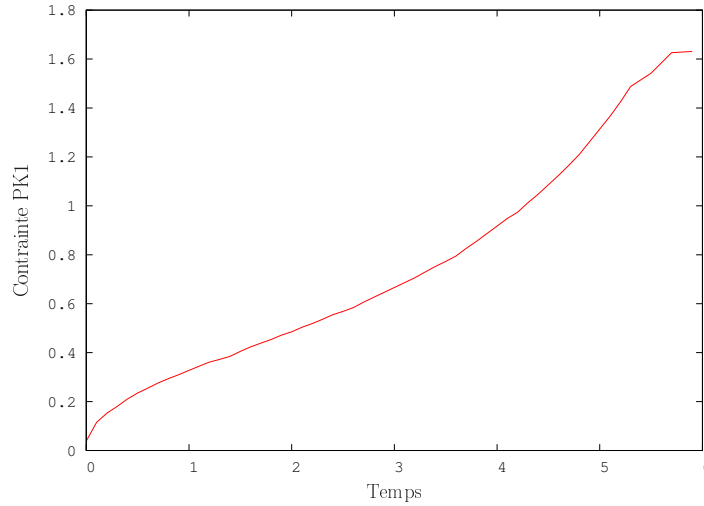


FIGURE I.12 – Courbe réponse d'un essai de traction sur éprouvette H2

• Approches phénoménologiques

– Le modèle de RIVLIN & SAUNDERS (1951)

C'est un modèle général qui considère l'énergie libre comme une série polynômiale, fonction des invariants des tenseurs de déformations.

$$\psi(I_1, I_2) = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad \text{avec} \quad C_{00} = 0 \quad (\text{I.12})$$

Cette approche polynômiale de l'énergie libre permet de modéliser différents types d'élastomères, en notant cependant qu'une augmentation de l'ordre de la série entraîne par la même occasion un plus grand nombre de paramètres à identifier.

– Le modèle de GENT-THOMAS (1958)

Ce modèle est basé sur des études expérimentales qui ont mis en évidence l'évolution de $\frac{\partial \psi}{\partial I_1}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial I_2}$ en fonction des invariants.

$$\psi(I_1, I_2) = C_1 (I_1 - 3) + C_2 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right) \quad (\text{I.13})$$

Cette forme permet, par sa non linéarité, de modéliser convenablement le comportement hyperélastique pour des déformations élevées et particulièrement une bonne représentation des comportements de matériaux cristallisables sous contraintes élevées.

– Le modèle de OGDEN (1972)

Ce modèle phénoménologique s'écrit en fonction des dilatations principales.

$$\psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3) \quad (\text{I.14})$$

$$\text{avec } \sum_{p=1}^N \mu_p \alpha_p = 2\mu \quad ; \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad \text{et} \quad \mu_p \alpha_p > 0$$

où μ est le module de cisaillement.

• **Approches statistiques**

Ces approches sont directement liées à la microstructure des polymères. La théorie gaussienne de l'élasticité, TRELOAR [1943] se base sur une description statistique du nombre de conformations possibles des chaînes, considérées comme un assemblage de segments libres en rotation, liés aux noeuds de réticulations qui sont supposés équirépartis. En tenant compte de l'entropie élémentaire d'une chaîne décrite par le loi de BOLTZMANN avec une probabilité de distribution gaussienne, on aboutit, sous l'hypothèse d'affinité, à l'énergie libre spécifique de NEOHOOKIENNE, fonction des élongations λ_i :

$$\psi = \frac{1}{2} nkT (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (\text{I.15})$$

n est le nombre de chaînes par élément de volume, K est le constante de BOLZMANN, et T la température absolue.

Du fait de la limite d'extension des chaînes, ce modèle donne de bons résultats jusqu'à des déformations de l'ordre de 50%.

Cette limitation a conduit d'autres auteurs tels que JAMES & GUTH (1943), ARRUDA et BOYCE [1993] à modifier cette approche en utilisant pour décrire la densité de probabilité des fonctions de *Langevin*, notée \mathcal{L} . On parle alors de modèles NON GAUSSIENS. Le passage de ces descriptions microscopiques au comportement macroscopique que l'on cherche à modéliser s'effectue en supposant des réseaux structurés à 3, 5 ou 8 chaînes orientés dans différentes directions de l'espace.

ARRUDA et BOYCE [1993] ont proposé un modèle formé de 8 chaînes orientées suivant les diagonales d'un cube unité, ce qui permet de lier l'élongation des chaînes avec le premier invariant de la déformation. On obtient, dans ce cas, l'énergie libre, appelée **modèle à 8 chaînes** couramment utilisée dans le développement des modèles micro-physiquement motivés :

$$\psi = nkTN_8 \left(\mathcal{L}^{-1}(\lambda_r) \lambda_r + \ln \left(\frac{\mathcal{L}^{-1}(\lambda_r)}{\text{Sinh}(\mathcal{L}^{-1}(\lambda_r))} \right) \right) + \psi_0 \quad (\text{I.16})$$

où N_8 est le nombre de monomères formant le réseau à 8 chaînes et $\lambda_r = \sqrt{\frac{I_1}{3N_8}}$, l'élongation d'un monomère.

I.3.3 Les modèles dissipatifs

• Approches phénoménologiques

Deux approches de la modélisation du comportement dissipatif existent :

- les formulations intégrales qui nécessitent une approche fonctionnelle,
- les formulations différentielles qui sont principalement axées sur la théorie de l'état local et la prise en compte de variables internes.

Etant donné le cadre thermodynamique dans lequel nous nous plaçons pour tout le développement de cette étude, nous ne nous intéresserons ici qu'aux formulations différentielles.

La modélisation d'un comportement dissipatif nécessite de postuler l'existence de pseudo-potentiels de dissipation d'après lesquels vont découler les lois d'évolution des différentes variables internes α_i . Dans le cas d'un matériau pour lequel la dissipation est affectée à plusieurs phénomènes (viscosité, plasticité, endommagement...), le potentiel de dissipation est la somme des diverses dissipations.

Afin de modéliser le comportement dissipatif d'un matériau, certains auteurs (LUBLINER(1986), LION [1997], LION [1998], MIEHE et KECK [2000]...) proposent une généralisation des modèles rhéologiques aux grandes déformations. Ils permettent ainsi une représentation et une description simples des variables internes nécessaires à la modélisation de ce matériau.

Pour ce faire, SIDOROFF [1976] postule l'existence de plusieurs états intermédiaires, pour passer d'un état de référence C_0 à un état actuel C_t . Cette approche nécessite la connaissance d'un nombre de variables internes d'autant plus important que le nombre d'états intermédiaires est grand. Le cas d'un milieu à une configuration intermédiaire est représenté sur la figure I.13.

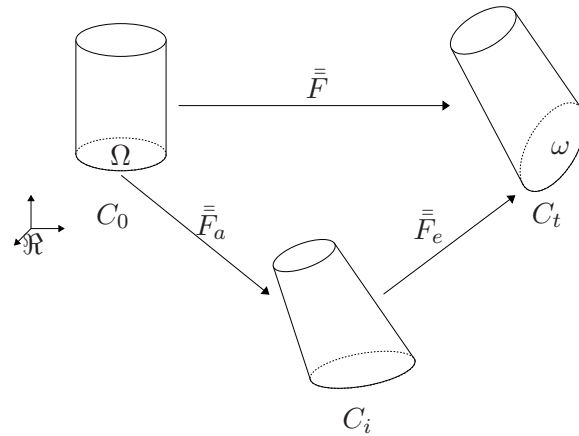


FIGURE I.13 – *Milieu à une configuration intermédiaire* [SIDOROFF, 1973].

Un certain nombre de modèles rhéologiques existent : les modèle de KELVIN-VOIGT, MAXWELL GÉNÉRALISÉ OU NON, POYNTING-THOMSON que nous avons représenté sur la figure I.14.

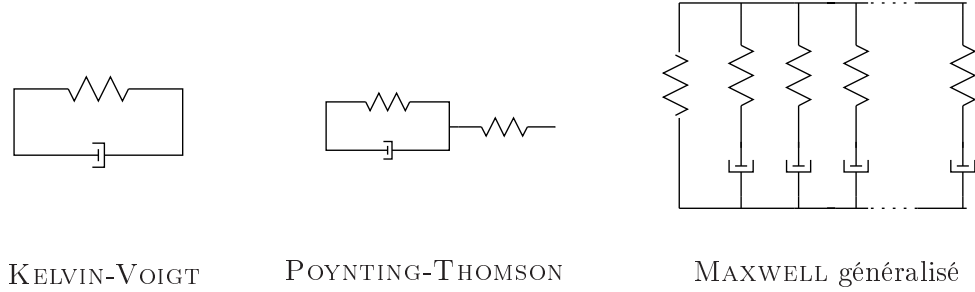


FIGURE I.14 – *Différents modèles rhéologiques visco-élastiques*

A partir de ces modèles, le choix des énergies de dissipation fonctions des bonnes variables internes reste la dernière étape pour déterminer complètement le comportement dissipatif d'un matériau.

• Dissipation visqueuse

Dans les cas de comportement visqueux de la matière, les modèles phénoménologiques de pseudo-potentiel de dissipation, couramment utilisés en grandes transformations, sont décrits à partir des mêmes potentiels que sous l'hypothèse des petites déformations.

Ils prennent la forme de fonctions quadratiques des taux des variables internes que nous notons "visqueuses" α_i^v et dépendent de paramètres η_i (LE TALLEC et RAHIER [1994] et BOUKAMEL *et al.* [2001]) tels que :

$$\varphi_v(\dot{\alpha}_i^v) = \frac{\eta_i}{2} \dot{\alpha}_i^v : \dot{\alpha}_i^v \quad \eta_i : \text{coefficient de viscosité} \quad (\text{I.17})$$

Nous présentons l'étude du modèle de POYNTING-THOMSON en annexe, afin de mettre en évidence les variables internes à prendre en compte lors de la mise en place d'un modèle de comportement dissipatif.

La viscosité est traduite par le coefficient de viscosité η_i qui peut être, soit une constante dans le cas d'un comportement visqueux linéaire, soit décrit à travers une loi puissance que l'on retrouve dans BOUKAMEL *et al.* [2001], soit défini par une approche identifiée par LAHELLEC [2001], dans les cas non linéaires. Celui-ci propose une forme de η fonction de la vitesse de chargement telle que : $\eta(\bar{\bar{X}}) = \text{Exp}(b_1 + b_2 \log(\bar{\bar{X}} : \bar{\bar{X}}))$ avec $\bar{\bar{X}} = \dot{\alpha}_i^v$ où $\bar{\bar{D}}$. Il développe alors un pseudo-potentiel de dissipation visqueuse non linéaire de la forme :

$$\varphi_v(\bar{\bar{D}}, \dot{\alpha}_i^v) = \text{Exp}(b_1 + b_2 \log(\bar{\bar{D}} : \bar{\bar{D}})) \dot{\alpha}_i^v : \dot{\alpha}_i^v \quad (\text{I.18})$$

• Dissipation plastique

Comme nous l'avons vu dans la partie § I.2.2.b, de plus en plus d'auteurs s'accordent à donner au comportement dissipatif des élastomères une signification non dépendante du temps qu'ils identifient à de la plasticité. Macroscopiquement, un comportement purement plastique est traduit par la courbe de la figure I.15 (a), un comportement élastoplastique sans écrouissage, plus réaliste, par la courbe I.15 (b) et enfin un comportement élastoplastique écrouissable par la courbe I.15 (c).

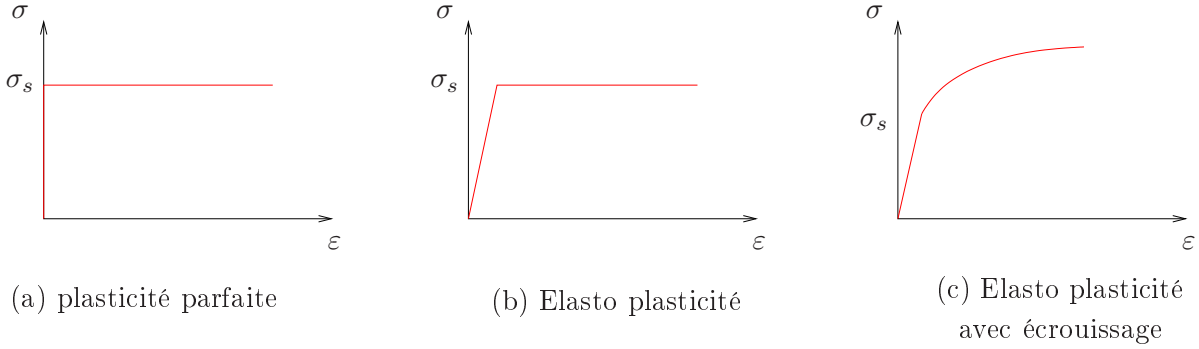


FIGURE I.15 – *Différents comportement plastique*

La modélisation d'un tel comportement passe par la description d'une surface seuil où d'un critère de plasticité: fonction définie au préalable, dans l'espace des contraintes et au dessus de laquelle il y a "écoulement plastique", c'est à dire apparition de déformations plastiques résiduelles lors du retour à charge nulle. Ce critère, frontière du domaine plastique, fait intervenir à priori toutes les composantes du tenseur des contraintes et les variables d'écrouissage (s'il y a lieu). Il est couramment noté f . Différentes formes de fonctions seuils tridimensionnelles existent dans la littérature, les plus utilisées sont les suivantes :

- **Critère de VON MISES**, dans le cas des critères isotropes

$$f = \sigma_{eq} - \sigma_s \quad \text{avec} \quad \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\sigma}^D : \bar{\sigma}^D} \quad \text{et} \quad \sigma_s \text{ la contrainte seuil} \quad (\text{I.19})$$

- **Critère de HILL ET TSAI**, dans le cas des comportements plastiques anisotropes.

Dans le cadre des **matériaux standards généralisés**, l'hypothèse de normalité peut s'écrire en fonction de la surface de charge f (dans le cas contraire, on introduit une fonction $\mathfrak{F} = \text{cst}$ qui donne la direction de l'écoulement dans l'espace des variables forces généralisées). Elle prend la forme suivante :

$$-\dot{\alpha}_i^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_i^p} \quad (\text{I.20})$$

avec $\dot{\lambda}$ le multiplicateur de plasticité. En comparant les équations I.10 et I.20, on remarque que la fonction f joue le rôle de fonction indicatrice de φ_p^* .

I.4 Bilan

En partant du cadre industriel dans lequel est intégré ce travail, nous avons mis en avant les attentes de la société EUROCOPTER, ainsi que les objectifs à atteindre, spécifiquement en terme de plages d'utilisation de service du matériau d'étude : un élastomère silicone chargé de silice.

En nous appuyant sur des études "micro-chimiques", nous avons souligné le fait que les élastomères chargés possèdent des propriétés mécaniques et micro-physiques, souvent accentuées voir largement conditionnées par la présence *in situ* des charges. On retrouve entre autres :

- l'hyper-élasticité
- la viscosité
- la plasticité
- l'influence de la température

Nous avons donné des interprétations de ces comportements qui ont souligné l'importance de la compréhension des mécanismes microscopiques pour la description de comportements macroscopiques.

Le cadre thermodynamique de la Mécanique des Milieux Continus a été succinctement abordé ici. Nous avons rappelé l'ensemble des hypothèses postulées pour arriver aux lois de comportements des élastomères chargés, telles que l'hypothèse de l'état local où l'isotropie du matériau. Une fois ces lois mises en place, nous avons proposé une revue des modèles hyper-élastiques les plus usités pour modéliser l'hyper-élasticité caoutchoutique propre aux élastomères, puis donné quelques modèles de comportements dissipatifs phénoménologiques qui ont largement fait leur preuve dans le domaine des élastomères.

CHAPITRE II

L'endommagement des élastomères

————— oOo —————

La connaissance du comportement d'un matériau est nécessaire à la mise en place de modèles fiables permettant de prédire le comportement de pièces dans divers cadres d'utilisation. Les modèles, présentés dans le chapitre I, fournissent la réponse temporelle, d'une pièce sollicitée, mais ne permettent pas une prédiction de sa durée de vie, ni de l'évolution de son comportement au fur et à mesure d'un endommagement. Pour ce faire, des échelles de temps et d'observation plus larges, ainsi que l'"histoire" des sollicitations subies par la pièce doivent être prises en compte.

Dans le cas des élastomères chargés, on distingue trois types d'endommagement. Le premier, connu sous le nom d'EFFET MULLINS est le fruit de ruptures de chaînes à faibles liaisons et de réarrangements moléculaires. Il se traduit par un assouplissement du comportement qui évolue avec l'histoire des déformations. Le second, l'endommagement sous chargement monotone apparaît à la suite de concentrations de contraintes au niveau des charges et se traduit par le développement continu de cavitations. Et enfin, l'endommagement par fatigue, que l'on retrouve lors de chargement cyclique. Il regroupe à la fois des mécanismes de concentrations de contraintes et de cavitation.

Plusieurs modèles de ces endommagements ont été proposés, utilisant des méthodes plus ou moins locales et permettant de représenter soit directement les mécanismes microscopiques (cavitations, fissuration), soit l'évolution du comportement macroscopique qu'ils engendrent. Nous donnons dans cette partie, une vision non exhaustive des différents modèles d'endommagement, développés pour décrire le comportement de matériaux chargés, spécialement des élastomères.

————— oOo —————

PLAN DU CHAPITRE II

| | | |
|-------------|---|-----------|
| II.1 | L'Effet Mullins | 35 |
| II.1.1 | Généralités et caractérisation expérimentale de l'EFFET MULLINS | 35 |
| II.1.2 | Etat de l'art des modèles de l'EFFET MULLINS | 37 |
| II.1.2.a | Les modèles macroscopiques | 37 |
| II.1.2.b | Les modèles micro-physiquement motivés | 43 |
| II.2 | Endommagement sous chargement monotone | 46 |
| II.2.1 | Observations microscopiques de l'endommagement monotone | 46 |
| II.2.2 | Modèles locaux d'endommagement monotone | 48 |
| II.2.2.a | Modèles basés sur des champs locaux | 48 |
| II.2.2.b | Modèles basés sur des critères énergétiques | 50 |
| II.2.3 | Modèles macroscopiques d'endommagement monotone | 51 |
| II.3 | La fatigue : endommagement sous chargement cyclique | 54 |
| II.3.1 | La fatigue à l'échelle micro... | 54 |
| II.3.2 | La fatigue à l'échelle macro... | 56 |
| II.3.3 | Modèles de comportement en fatigue | 59 |
| II.3.3.a | Les critères de durée de vie | 60 |
| II.3.3.b | Les modèles d'endommagement continu | 66 |
| II.4 | Synthèse de ces observations et modèles d'endommagement | 68 |

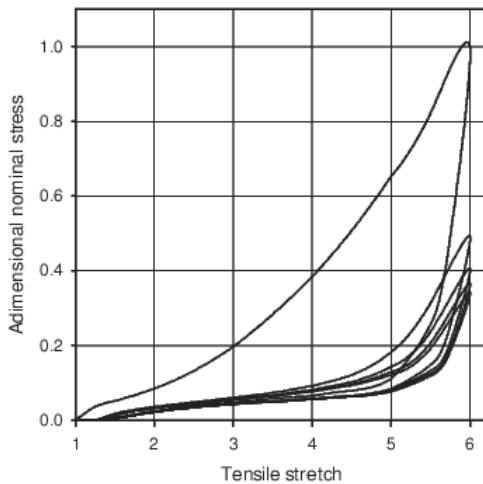
II.1 L'Effet Mullins

L'effet Mullins peut-être caractérisé à la fois comme un phénomène d'endommagement mais aussi comme une spécificité du comportement en grandes déformations des élastomères. En effet, malgré qu'il s'agisse d'un changement de microstructure initiale (par perte de liaison inter-chaînes) qui conduit essentiellement à la stabilisation du comportement et non pas à la ruine du matériau, et parce qu'il représente un phénomène irréversible, nous le classons ici avec les phénomènes d'endommagement. Nous signalons, de plus, que ce phénomène peut-être partiellement recouvré par un échauffement qui conduit à la réticulation des chaînes.

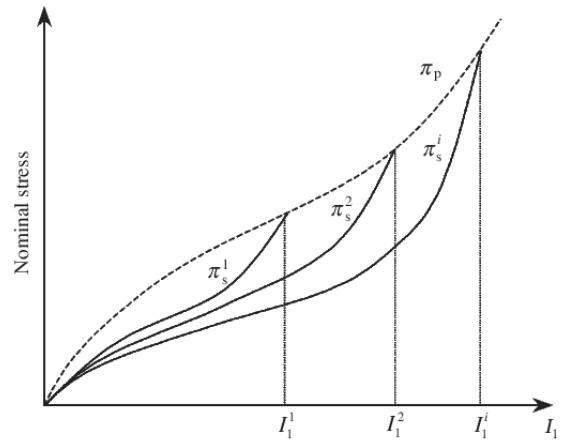
II.1.1 Généralités et caractérisation expérimentale de l'EFFET MULLINS

L'effet Mullins, autrement appelé ADOUCISSEMENT CYCLIQUE, se traduit d'un point de vue expérimental par :

- une diminution successive de la contrainte lors des premiers cycles II.1(a), le comportement du matériau se trouve ensuite stabilisé,
- le fait qu'un élastomère puisse prendre deux chemins de chargements différents suivant qu'on le charge ou qu'on le recharge II.1(b),
- l'apparition d'une déformation résiduelle.



(a) Adoucissement cyclique



(b) Effet Mullins

FIGURE II.1 – *Endommagement discontinu (d'après CHAGNON et al. [2003])*

On voit alors apparaître un endommagement qui n'est mesurable qu'après décharge et qui dépend principalement du maximum d'une certaine mesure de déformation, appelée aussi déformation équivalente, atteint au cours de l'histoire.

Plus, finement, l'assouplissement des hystérésis et la dépendance à l'histoire du chargement de la réponse ont donné lieu à plusieurs interprétations microscopiques différentes :

- BLANCHARD [1954] présente une description quantitative dans laquelle l'effet Mullins résulte de la rupture de liaisons faibles,
- BUECHE [1960] voit l'effet Mullins comme une rupture des chaînes connectées aux charges, lorsque ces chaînes ont atteint leur extension maximale propre à chaque chaîne, FIGURE II.2(b),
- d'autres auteurs, tel que MULLINS et TOBIN [1965] supposent que cohabitent, dans les élastomères, une phase dite "dure" et une phase dite "molle". L'effet Mullins est, alors, interprété par la transformation d'une partie de la phase "dure" en phase "molle",
- enfin, DANNENBERG(1966), en considérant les phénomènes à l'interface entre charge et matrice, évoque la notion de glissement de chaînes d'élastomères adsorbés à la surface des charges sous l'effet de déformation

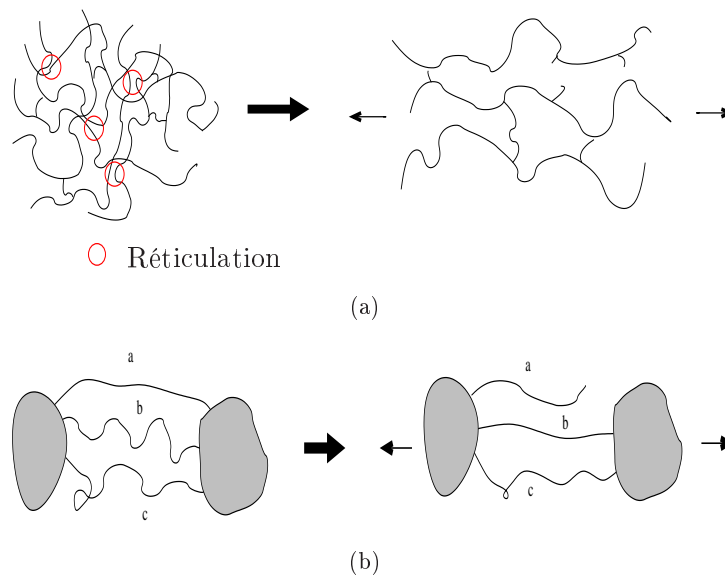


FIGURE II.2 – *Interprétations microscopiques de l'effet Mullins*

Dernièrement, DORFMANN et OGDEN [2004] se sont intéressés à l'influence du taux de charges sur l'effet Mullins. À partir d'une campagne expérimentale pertinente, ils ont mis en évidence l'apparition de ce phénomène pour des élastomères chargés et non chargés, en mettant principalement l'accent sur le fait que plus le taux de charges est important, plus l'effet Mullins est prononcé.

Aujourd'hui, puisque les élastomères chargés et non chargés font apparaître ce phénomène, les auteurs s'accordent sur un rôle simultané des différents micro-mécanismes cités ci-dessus.

Toutes les interprétations microscopiques de ce phénomène enrichies d'années en années grâce à l'amélioration des techniques expérimentales, ont permis la construction de modèles microphysiquement motivés, couplant cet endommagement aux modèles de comportement hyperélastique décrits dans le paragraphe § I.3.

II.1.2 Etat de l'art des modèles de l'EFFET MULLINS

Dans ce paragraphe, nous proposons une revue des différents modèles du phénomène d'EFFET MULLINS. Dans la première partie, les modèles de comportement macroscopiques sont regroupés. Les modèles micro-mécaniques dont les motivations sont liées à des observations microscopiques sont exposés ensuite.

II.1.2.a Les modèles macroscopiques

Sur la base des modèles phénoménologiques de comportement, deux types d'endommagement sont décrits : le premier, basé sur la théorie de l'endommagement continu, le deuxième, basé sur la théorie de pseudo-élasticité.

•Modèles basés sur la théorie de l'endommagement continu

Ces modèles se basent sur la théorie de l'endommagement continu telle qu'elle a été suggérée par KACHANOV [1958], puis décrite dans LEMAITRE et CHABOCHE [1985]. Cette théorie se base sur l'hypothèse suivante : si l'on suppose un élément d'aire initiale S , endommagé de façon isotrope et donc constitué de fissures et de trous, tels que l'aire de ces défauts soit notée S_d ; alors la variable d'endommagement d peut être interprétée comme le rapport $\frac{S_d}{S}$. Dans le cas d'un endommagement anisotrope, les aires S et S_d , ainsi que la variable d'endommagement, devront être repérées par leur normale respective, et dans ce cas, d prendra une forme tensorielle.

Cette théorie a été généralisée aux grandes déformations, en particulier à l'hyper-élasticité grâce aux travaux de ANDRIEUX *et al.* [1997]. Ils ont permis de relier cet endommagement aux fonctions énergétiques indispensables à la description d'un modèle de comportement hyperélastique, par l'introduction d'une variable interne d'endommagement, que nous noterons d dans la suite, telle que l'énergie libre puisse s'écrire :

$$\psi(\bar{\bar{F}}) = (1 - d)\psi_o(\bar{\bar{F}}) \quad (\text{II.1})$$

où $\psi_o(\bar{\bar{F}})$ est l'énergie libre du matériau vierge et où d peut-être une grandeur scalaire, vectorielle ou tensorielle, suivant la description faite de l'endommagement.

Un des points clefs de ce type de modèle est la définition de la grandeur caractéristique de la déformation maximale atteinte par le matériau au cours de son histoire de sollicitation. Nous notons α cette grandeur et $\lambda(t)$ représente sa variation au cours du temps. On définit alors une surface seuil de d'endommagement (par comparaison avec la surface seuil de plasticité) dans l'espace des déformations, décrite par :

$$f(\alpha, \lambda(t)) = \lambda(t) - \alpha = 0 \quad (\text{II.2})$$

ainsi qu'une loi d'évolution de l'endommagement \dot{d} .

Nous décrivons ici quelques modèles basés sur cette théorie de l'endommagement continu.

◦ Modèle d'endommagement isotrope de type SIMO [1987]

Ce modèle est un des premiers modèles traitant de l'endommagement des matériaux élastomériques.

Il se base sur l'hypothèse suivante : l'endommagement par effet Mullins est entièrement défini par le maximum de la déformation atteint par le matériau au cours du temps.

SIMO [1987] définit d'abord une déformation équivalente de la forme : $\lambda(t) = \sqrt{2\psi_0(\bar{\bar{E}}(t))}$ et son maximum $\alpha = \max_{\tau \in [0, t]} \sqrt{2\psi_0(\bar{\bar{E}}(\tau))}$.

Il décrit l'évolution de l'endommagement comme étant dépendante d'une fonction $\bar{h}(\lambda(t))$ caractéristique du processus d'endommagement.

$$\dot{d} = \begin{cases} \bar{h}(\lambda(t))\dot{\lambda} & \text{si } f(\lambda(t)) = 0 \quad \text{et} \quad \bar{N} : \dot{\bar{\bar{E}}} > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

$\bar{\bar{E}}$ est la déformation de GREEN-LAGRANGE et $\bar{N} = \frac{\partial f}{\partial \lambda(t)} \frac{\partial \lambda(t)}{\partial \bar{\bar{E}}}$ est, ici, la normale à la surface seuil.

Le modèle est défini par la description de \bar{h} , choisie de la forme suivante :

$$\bar{h}(\lambda(t)) = -\frac{dg(\lambda(t))}{d\lambda(t)} \quad \text{avec} \quad g(x) = b + (1-b)\frac{1 - e^{x/a}}{x/a} \quad , \quad b \in [0,1] \quad , \quad a \in [0,\infty] \quad (\text{II.4})$$

avec a et b des paramètres caractéristiques du matériau.

Ce modèle a été ensuite amélioré par des couplages avec d'autres effets, tels que la viscosité. Ces modèles d'endommagement ne tiennent cependant pas compte de l'évolution de l'assouplissement au cours des différents cycles (pour des niveaux de déformations égales).

◦ Modèle d'endommagement isotrope de type MIEHE [1995]

Dans cet article, MIEHE [1995] tient compte à la fois d'un endommagement à seuil de déformation maximale (SIMO [1987]) mais aussi d'un endommagement continu qui apparaît au fil

des cycles de chargement. L'endommagement se décompose, ainsi, en deux parties :

- un endommagement discontinu à seuil qui apparaît lors de la première décharge et qui évolue uniquement quand le seuil d'énergie ou déformation est dépassé,
- un endommagement continu qui apparaît même lorsque ce maximum n'est pas atteint.

Ce modèle nécessite donc la définition de deux variables d'endommagement, \hat{d}_α et \hat{d}_β , telles que $d = \hat{d}_\alpha(\alpha) + \hat{d}_\beta(\beta)$ qui dépendent, chacune, de la force thermodynamique associée à la variable d'endommagement. La déformation équivalente est, dans ce modèle, l'énergie de déformation non endommagée du matériau $\lambda(t) = \psi_0$. Les variables α et β sont définies de la façon suivante :

$$\alpha = \max_{\tau \in [0, t]} (\lambda(\tau)) \quad \text{et} \quad \dot{\alpha} = \begin{cases} \dot{\psi}_0 = \bar{\sigma}_0 : \bar{\bar{D}} & \text{pour } f = \lambda(t) - \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\psi}_0 > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

$$\beta = \int_0^t |\alpha(\tau)| d\tau \quad \text{et} \quad \dot{\beta} = |\lambda(t)| = |\dot{\psi}_0| = \text{signe}[\dot{\psi}_0] \bar{\sigma}_0 : \bar{\bar{D}} \quad (\text{II.6})$$

où σ_0 est la contrainte effective non endommagée telle que $\sigma_0 = \bar{\bar{B}} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}}$.

Ainsi, en développant ce modèle, ils obtiennent des fonctions d'endommagement de la forme :

$$\begin{cases} \hat{D}_\alpha(\chi) = D_\alpha^\infty [1 - \exp(-\frac{\chi}{\eta_\alpha})] \\ \hat{D}_\beta(\beta) = D_\beta^\infty [1 - \exp(-\frac{\beta}{\eta_\beta})] \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Ce modèle décrit l'effet Mullins de façon plus précise que le modèle de SIMO [1987] puisqu'il tient compte en plus de la déformation maximale, d'une accumulation d'endommagement dans le matériau.

◦ Autres modèles d'endommagement isotrope

À partir des deux modèles cités ci-dessus, on peut trouver d'autres modèles qui diffèrent de ceux-ci principalement par l'écriture du critère d'endommagement.

- Travaux de BEATTY et KRISHNASWAMY [2000]

Ils interprètent l'endommagement par effet Mullins de la même façon que HARWOOD, soit comme le passage d'une phase dure du matériau en une phase dite molle lors du processus d'endommagement. Ainsi, ils donnent à une variable d'endommagement scalaire d un sens physique : elle représente la partie de la phase dure transformée en phase molle.

En partant de l'hypothèse de SIMO [1987] l'effet Mullins peut être défini par la connaissance du maximum de déformation atteint, $d = d(\alpha)$, ils posent $\alpha = \max_{\tau \in [0, t]} \|\bar{\bar{B}}(\tau)\|$, soit $\lambda(t) = \sqrt{\text{tr} \bar{\bar{B}}^2(t)}$

où $\bar{\bar{B}}(t)$ est le tenseur de CAUCHY-GREEN gauche.

Ils décrivent, à partir d'observations expérimentales sur des essais de traction uniaxiale, une forme de l'endommagement du type :

$$d(\alpha) = 1 - \exp(-b(\alpha - \sqrt{3})) \quad (\text{II.8})$$

Ce modèle est un modèle d'endommagement isotrope, discontinu, qui traite de façon analytique la traction uniaxiale et le cisaillement pur.

– Travaux de CHAGNON *et al.* [2003]

L'idée est de choisir $\lambda(t)$, fonction des deux premiers invariants de la transformation (en supposant un matériau incompressible), telle que $\lambda = g(I_1, I_2)$ avec g une fonction définie et différentiable, par rapport aux deux invariants sur $[3, +\infty) \times [3, +\infty)$, avec $g(3, 3) = 0$ et $g_{,I_1} > 0$ et $g_{,I_2} \geq 0$.

En choisissant g de la forme $g(I_1, I_2) = \sqrt{I_1/3} - 1$, ils obtiennent à un endommagement discontinu isotrope, de la même forme que la partie discontinue de l'endommagement de MIEHE [1995] : $d\alpha$.

La seule prise en compte de I_1 , dans l'écriture de α , réduit fortement le domaine d'application de ce modèle aux essais uniaxiaux.

D'autres modèles, tels que celui de LAIARINANDRASANA *et al.* [2003], basés sur la théorie de l'endommagement continu, existent dans la littérature. Ils se distinguent des précédents par l'écriture de leur loi d'évolution de l'endommagement et du maximum de déformation équivalente pris en compte. Nous ne développons pas ces modèles par soucis de concision.

•Modèles hyper-élastiques avec frottement interne

CANTOURNET [2002] interprète l'Effet mullins comme un phénomène de glissement, à la fois entre les chaînes macromoléculaires elles-mêmes, mais aussi entre les chaînes et les charges. Par analogie avec le modèle de plasticité non linéaire à écrouissage cinématique, en petite déformation, les auteurs développent un modèle d'effet Mullins sans endommagement (ni viscosité dans ce cas) en grandes déformations (qui permet de reproduire à la fois le comportement hystérique et l'assouplissement). Ils définissent alors l'énergie libre totale du modèle, par l'équation II.9, fonction de trois variables internes : $\bar{\bar{E}}$ le tenseur des déformations de GREEN-LAGRANGE, $\bar{\bar{E}}^\pi$: le tenseur des déformation anélastique et $\bar{\bar{\alpha}}$: lié aux glissements internes :

$$\rho_0\psi = W_1(\bar{\bar{E}}) + W_2(\bar{\bar{E}} - \bar{\bar{E}}^\pi) + \frac{1}{2}C_x\bar{\bar{\alpha}} : \bar{\bar{\alpha}} \quad (\text{II.9})$$

Les lois d'évolution sont alors écrites à partir d'une fonction critère f telle que :

$$\begin{cases} f < 0 \implies \text{Pas de frottement interne} \\ f = 0, \dot{f} = 0 \implies \exists \text{ un frottement interne} \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

En supposant un modèle général non associé, le potentiel de dissipation φ est défini par :

$$\varphi = f(\bar{S}_2, \bar{X}) + \frac{1}{2C_x} \gamma \bar{X} : \bar{X} \quad (\text{II.11})$$

où \bar{S}_2 et \bar{X} sont les forces thermodynamiques associées à \bar{E}^π et $\bar{\alpha}$.

Après analyse de l'influence des paramètres sur le comportement, et identification de ceux-ci, ils obtiennent pour deux matériaux différents des résultats très concluants sur 3 cycles de chargement. On peut noter cependant que ce modèle, puisqu'il ne tient pas compte de la viscosité, est valable sur une plage réduite de vitesse de sollicitation.

•Modèles basés sur la théorie de la pseudo-élasticité

OGDEN et ROXBURGH [1999a], OGDEN et ROXBURGH [1999b] ont appliqué la théorie de pseudo-élasticité, dans le cas de matériaux incompressibles, pour modéliser le comportement de l'effet Mullins, dans le cas d'un essai de traction simple. Pour ce faire, une variable d'endommagement est intégrée dans l'énergie élastique, qui devient, alors, une énergie pseudo-élastique : $\mathcal{W}(\lambda_1, \lambda_2, \eta)$ où les λ_i représentent les dilatations principales et η la variable dite "additionnelle", représentant l'état d'endommagement. L'endommagement étant supposé isotrope, η est une variable scalaire. Ils supposent, pour décrire η , que cet endommagement ne dissipe pas d'énergie :

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{II.12})$$

Pendant un processus de déformation quelconque, η prend deux états : il est soit inactif $\eta = 1$, soit actif $0 \leq \eta < 1$, et dans ce cas η dépend de la déformation via l'équation II.12.

OGDEN et ROXBURGH [1999b] optent pour un modèle découplé de l'énergie de déformation tel que :

$$\mathcal{W}(\lambda_1, \lambda_2, \eta) = \eta \widetilde{\mathcal{W}}(\lambda_1, \lambda_2) + \phi(\eta) \quad \text{avec} \quad \phi(1) = 0 \quad (\text{II.13})$$

Cette écriture permet :

- quand $\eta = 1$, de décrire la montée en charge, uniquement à partir de l'énergie de déformation d'un matériau non endommagé $\widetilde{\mathcal{W}}(\lambda_1, \lambda_2)$,
- quand $\eta = 0$, de déterminer la déformation résiduelle. $\phi(0)$ est l'énergie résiduelle (non recouvrable) qui peut-être interprétée comme étant l'énergie nécessaire à un endommagement du matériau.

La forme de η est choisie, en accord avec le modèle phénoménologique développé, dépendante d'une énergie de déformation maximale. Ce modèle étant basé sur une approche énergétique, il est valable dans le cas d'essais plus complexes tri-dimensionnels, mais il reste discutable, notamment, vis-à-vis de l'hypothèse de non dissipation lors de la décharge.

DORFMANN et OGDEN [2004] ont amélioré ce modèle, en y introduisant de l'anisotropie par le biais de deux variables additionnelles η_1 et η_2 .

η_1 permet de décrire l'adoucissement de la réponse, avec $0 < \eta_1 \leq 1$, et η_2 tient compte de l'accumulation de déformations résiduelles, avec $0 \leq \eta_2 \leq 1$.

Le matériau testé en traction simple est toujours incompressible et initialement isotrope. L'énergie de déformation pseudo-élastique utilisée est de la forme suivante :

$$\widetilde{W}(\lambda, \eta_1, \eta_2) = \eta_1 \widetilde{W}_0(\lambda) + (1 - \eta_2) \widetilde{N}(\lambda) + \phi_1(\eta_1) + \phi_2(\eta_2) \quad (\text{II.14})$$

En suivant une démarche similaire à celle de OGDEN et ROXBURGH [1999a], ils arrivent à des formes spécifiques des variables η_1 et η_2 , qui prennent la valeur unité durant la première montée en charge, puis qui décroissent, lors de la première décharge, de façon monotone et dépendante de λ , jusqu'à une valeur η_{1min} pour η_1 et 0 pour η_2 :

$$\eta_1 = 1 - \frac{1}{r} \tanh \left[\frac{W_m - \widetilde{W}_0(\lambda)}{\mu m} \right] \quad (\text{II.15})$$

$$\eta_2 = \tanh \left[\left(\frac{\widetilde{W}_0(\lambda)}{W_m} \right)^{\alpha(W_m)} \right] / \tanh(1) \quad (\text{II.16})$$

où \widetilde{W}_m et $W_0(\lambda)$ sont respectivement la valeur de l'énergie pour la déformation maximale et la fonction d'énergie de déformation non endommagée (lors de la première montée en charge). r , m et μ sont des paramètres matériaux.

La fonction $\widetilde{N}(\lambda)$ est intégrée au modèle pour décrire le caractère anisotrope de la réponse, une fois l'endommagement apparu. Cet endommagement entraîne des déformations résiduelles qui induisent, à leur tour, l'apparition de directions privilégiées dans la matériau et donc d'anisotropie induite.

Ces modèles, basés sur la théorie de la pseudo-élasticité, couplés à des lois de comportement et à des lois complémentaires découlant de la mécanique des milieux continus ont donné de bonnes similitudes vis à vis d'essais expérimentaux. Cependant ces modèles restent thermodynamiquement discutables, du fait des hypothèses émises sur la non dissipation de l'endommagement.

II.1.2.b Les modèles micro-physiquement motivés

Ces modèles de comportement décrits à partir d'énergie libre spécifique sont la généralisation des modèles micro-physiquement motivés présentés dans le chapitre § I.3.2, et plus particulièrement des modèles non gaussiens tels que les ont décrits JAMES & GUTH, ARRUDA et BOYCE [1993]. Deux types de modèles, basés sur deux descriptions différentes de l'effet Mullins, existent dans la littérature.

•Modèles de type GOVINDJEE et SIMO [1991]

Les premiers modèles, initiés par GOVINDJEE et SIMO [1991], découlent de l'hypothèse qu'il existe deux sortes de chaînes macroscopiques au sein d'un élastomère chargé : les chaînes dites "p-p" qui relient deux particules entres-elles et les autres dites "c-c". L'idée est que les chaînes "p-p" (dont l'énergie d'interaction est la plus faible) s'étirent jusqu'à se rompre sous l'action d'une déformation, se retrouvant ainsi "libres", et finalement comptabilisées parmi les chaînes "c-c". Les auteurs traitent ce problème par une technique d'homogénéisation en volume. L'étude d'un volume élémentaire représentatif d'un matériau chargé, dans lequel les inclusions sont supposées rigides, a amené les auteurs à établir une expression de l'énergie globale, fonction de la fraction volumique de charge ν_p , des dilatations principales λ_i et d'un maximum de déformation sur l'histoire du matériau, μ_{max} , de la forme suivante :

$$\psi(\lambda_i) = (1 - \nu_p) \left[\psi_{cc}(\langle \lambda_i \rangle_X^m) + \psi_{pp}(\langle \lambda_i \rangle_X^m, \mu_{max}) \right] \quad (\text{II.17})$$

où $\langle \cdot \rangle_X^m$ est la moyenne volumique standard sur la matrice.

L'endommagement dû à l'effet mullins est uniquement pris en compte dans l'énergie de déformation des chaînes "p-p". Le modèle se trouve ainsi décrit de la façon suivante :

$$W_{pp}(\langle \lambda_A \rangle_X^m, \mu_{max}) = \frac{N_{pp}}{3} \sum_{A=1}^3 \iint_{\mathcal{A}_X} P(n, R) w(n, \langle \lambda_A \rangle_X^m R) dR dn \quad (\text{II.18})$$

où N_{pp} représente le nombre de chaînes "p-p" par unité de volume de la matrice, $P(n, R)$ est la probabilité de trouver, dans un volume élémentaire, une chaîne constituée de n monomères de longueur R et $\mathcal{A}_X = \{(n, R) | na > \mu_{max} R\}$ pour a la longueur de KÜHN statistique d'une unité de monomère.

La densité d'énergie de déformation $w(n, \langle \lambda_i \rangle_X^m R)$ et l'énergie des chaînes "c-c", ψ_{cc} , peuvent être décrites par des modèles statistiques de type 3 CHAÎNES, que nous avons vu dans la partie § I.3.2.

L'endommagement apparaît pour μ (maximum de la déformation actuelle) et μ_{max} remplissant les conditions de KÜHN-TUCKER. Les comparaisons entre simulations et expériences ont donné de bonnes concordances pour un nombre réduit de cycles (2 cycles) sur des essais uniaxiaux.

GOKTEPE et MIEHE [2005] ont étendu le modèle de GOVINDJEE et SIMO [1991] à un modèle d'endommagement anisotrope par homogénéisation numérique sur des micro-sphères unités. Pour ce faire, ils définissent un ensemble de variables d'endommagement macroscopiques anisotropes, $\mathcal{D} := \{d(\vec{r}, t)\}$. $d(\vec{r}, t)$ est l'endommagement d'une chaîne, assimilable à une variable d'endommagement basée sur la théorie de l'endommagement continu, repérée par le vecteur d'orientation \vec{r} et dont l'évolution est fonction d'une énergie de déformation normalisée de cette chaîne $\varphi(\lambda)$:

$$\dot{D} = \begin{cases} \dot{\varphi}(\lambda) & \text{pour } \varphi = \varphi(\lambda, d) \text{ et } \dot{\varphi} > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

$$\text{avec } \varphi(\lambda) = \lambda_r^{pp} \mathcal{L}^{-1}(\lambda_r^{pp}) + \ln\left(\frac{\mathcal{L}^{-1}(\lambda_r^{pp})}{\text{Sinh}(\mathcal{L}^{-1}(\lambda_r^{pp}))}\right) \quad \text{où } \lambda_r^{pp} = \frac{\lambda}{\sqrt{N^{pp}}}$$

L'énergie libre microscopique (en terme d'homogénéisation) des chaînes p-p : ψ^{pp} , dépend de l'énergie libre normalisée $\varphi(\lambda)$ et de l'endommagement $d(\vec{r}, t)$, de la façon suivante :

$$\psi^{pp}(\varphi(\lambda), d) = kTN^{pp} \int_0^{\varphi(\lambda)} \xi(\tilde{\varphi}(\lambda), d) d\tilde{\varphi}(\lambda) + \psi_d^{pp}(d) \quad (\text{II.20})$$

$$\text{avec } \xi(\varphi, d) = c_1(d) [\varphi - c_2(d)]^2 + c_3(d) \quad (\text{II.21})$$

Le passage aux grandeurs macroscopiques se fait par le développement d'une technique d'homogénéisation qui respecte les conditions d'orientation des différents réseaux microscopiques.

Ce modèle permet alors de refléter à la fois le comportement anisotrope de l'effet Mullins et la déformation résiduelle en tant qu'effet induit de l'anisotropie. Il faut noter cependant que ces modèles nécessitent la connaissance de grandeurs microscopiques, comme la fraction volumique de charge, quelques fois difficile à obtenir.

•Modèles de type MARCKMANN *et al.* [2002]

MARCKMANN *et al.* [2002] font une autre interprétation du phénomène d'endommagement par effet Mullins, qu'ils relient à un réarrangement du réseau moléculaire. Ils supposent d'abord que les ponts de réticulation (apparus après polymérisation) et les interactions entre chaînes polymériques sont impliqués dans le processus d'effet Mullins. Sous l'effet d'une sollicitation, certaines chaînes vont être étirées jusqu'à leur limite d'extensibilité et vont donc se rompre, induisant ainsi une augmentation du nombre moyen de monomères par chaîne de polymère (noté N). Ce nombre moyen est alors décrit comme une fonction croissante du maximum de déformations λ_{max} vu par le matériau.

Par ailleurs, du fait de la conservation de la masse⁽¹⁾, le nombre moyen de chaînes de polymère par unité de volume, noté n , est une fonction décroissante de λ_{max} .

En supposant un comportement non visqueux, ils utilisent le modèle statistique à 8 chaînes, développé par ARRUDA et BOYCE [1993], qui dépend à la fois de n et de N . La fonction $N(\lambda_{max})$ est choisie à partir de résultats expérimentaux comme une fonction polynomiale de degrés variant de 1 à 4.

Ce modèle a donné de bon résultats, particulièrement vis-à-vis de l'évolution du comportement, pour différents taux de charges. Cependant, ni les déformations résiduelles, ni l'anisotropie induite par effet Mullins ne sont prises en compte dans ce modèle. Les auteurs imputent ces phénomènes aux effets de visco-élasticité.

DIANI *et al.* [2005] ont amélioré le modèle de MARCKMANN *et al.* [2002] en y introduisant les effets manquant. Ce modèle repose sur le fait que les directions privilégiées contribuant à la densité d'énergie sont des directions matérielles qui ne suivent pas forcément les directions principales de $\bar{\bar{F}}$.

En considérant m chaînes, constituées de N monomères et caractérisées par leur direction \vec{u}^i , la densité d'énergie de déformation s'écrit de la façon suivante :

$$W(\bar{\bar{F}}) = \sum_{i=1}^m \omega_i n_i w(\lambda_i) \quad \text{avec} \quad \lambda^i = (\bar{\bar{F}} \vec{u}^i)^t \cdot (\bar{\bar{F}} \vec{u}^i) \quad (\text{II.22})$$

où n_i définit le nombre de chaînes par unité de volume dans la direction \vec{u}^i ; $w(\lambda_i)$ est la densité d'énergie de déformation d'une chaîne constituée de N monomères et enfin ω_i est un facteur de pondération associé à la direction \vec{u}^i .

Ainsi l'anisotropie résulte de la distribution de l'endommagement dans les différentes directions matérielles.

En résumé, la littérature concernant la modélisation de l'effet Mullins est largement fournie et de nombreuses études continuent à être menées à ce jour. Nous avons essayé dans ce paragraphe d'en faire une synthèse pas nécessairement exhaustive, afin de s'en inspirer par la suite, dans le but de proposer des modèles d'endommagement par fatigue en utilisant une partie des concepts proposés.

(1). le nombre de segments de monomères par unité de volume reste constant : $Nn = cst$

II.2 Endommagement sous chargement monotone

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'endommagement sous chargement monotone. Nous verrons, dans une première partie, comment se manifeste à l'échelle microscopique cet endommagement dans les élastomères chargés, puis nous ballaierons quelques modèles d'endommagement, développés dans le cas de chargements monotones.

II.2.1 Observations microscopiques de l'endommagement monotone

Les études concernant l'endommagement sous chargement monotone requièrent des essais propres à la caractérisation d'un tel phénomène. Ces essais sont réalisés en traction, cisaillement, torsion ou même sous sollicitation composée, en uniaxiale ou biaxiale mais à sollicitation croissante jusqu'à une déformation imposée ou jusqu'à rupture de l'éprouvette.

Ce type d'endommagement est fortement conditionné par la présence et la qualité de charges. Suivant les types de charges, les mécanismes d'endommagement sont différents. Trois aspects principaux permettent la description de ces phénomènes : **la cavitation, l'apparition et la propagation de fissures** qui entraînent ainsi une variation du volume du matériau.

ROBISSON [2000] à mis en évidence principalement deux types d'endommagement à coeur, dans des élastomères chargés de silice :

- soit des décohésions à l'interface entre matrice et aggrégats de silice (de taille $1\mu m$) qui, contrairement aux agglomérats, ont une bonne cohésion interne et une faible cohésion avec la matrice.
- soit des décohésions à l'intérieur des agglomérats de charges qui finissent par disloquer l'agglomérat, créant ainsi une fissure au sein de la matrice (*cf.* FIGURE II.3).

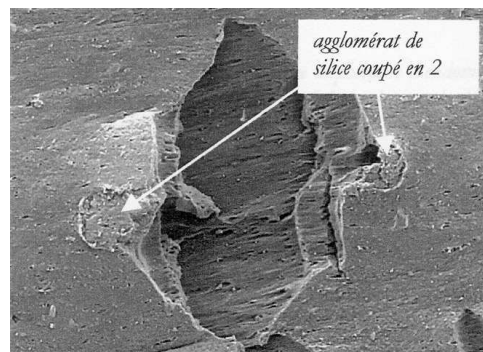


FIGURE II.3 – Observations au MEB des inclusions de silice dans un matériau endommagé (ROBISSON [2000])

Dans le cas des charges de noir de carbone qui présentent une meilleure cohésion avec la matrice, SAINTIER [2001] présente trois types d'endommagement, sous traction monotone :

- un endommagement dans l'inclusion qui génère une rupture brutale de l'agglomérat. Une fissure se propage dans la matrice uniquement lorsque la limite de déchirabilité du matériau est atteinte (*cf.* FIGURE II.4(a)),
- une fissure au niveau d'un des pôles de la charge sans qu'il n'y ai auparavant cavitation. L'autre pôle pouvant se fissurer ce qui conduit éventuellement à une rupture de la particule,
- une décohésion à l'interface entre une charge et la matrice, au niveau des pôles, entraînant la propagation de fissures, à partir d'un certain seuil de déformation macroscopique. La rupture de la charge est dans ce cas impossible, puisque plus celle-ci est décollée de la matrice moins elle est contrainte (*cf.* FIGURE II.4(b)).

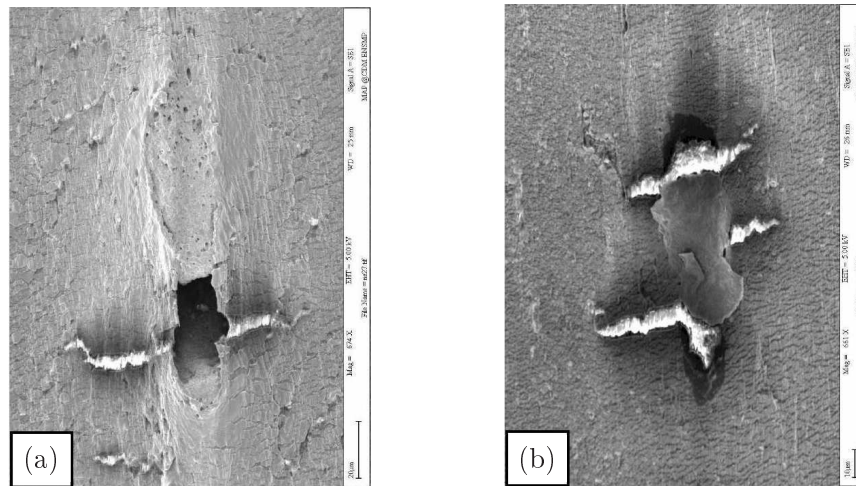


FIGURE II.4 – *Observations au MEB des charges de carbone dans un matériau endommagé (SAINTIER [2001])*

À travers ces observations, il semble que les mécanismes microscopiques d'endommagement sous chargement monotone soient fortement dépendant du types de charges : de leur forme, de leur cohésivité, du taux de charge, du rapport de rigidité charge/matrice...

En résumé, l'endommagement sous chargement monotone est fortement conditionné par la microstructure du matériau. Les résultats expérimentaux présentés dans le paragraphe § II.2.1 ont mis en avant deux principaux mécanismes d'endommagement :

- un mécanisme de "cavitation" ou de "décollement" au niveau des interfaces charge/matrice,
- un mécanisme de "fissuration" dans la matrice ou au sein même des inclusions.

Deux types de modèles existent pour traduire ces phénomènes de cavitation, dans le cas d'élastomères chargés :

- les modèles microscopiques ou modèles locaux, basés soit sur les champs de contrainte au voisinage d'une inclusion, soit sur les énergies de surface,
- les modèles globaux liés à la théorie de l'endommagement continu qui restent similaires aux modèles utilisés pour l'endommagement de type MULLINS.

Nous présentons dans une première partie les modèles locaux qualifiés de semi-empiriques, puis enfin quelques modèles macroscopiques d'endommagement, couplés à des lois de comportement hyper-élastiques.

II.2.2 Modèles locaux d'endommagement monotone

Dans cette partie, nous développons principalement les mécanismes d'endommagement localisés au niveau des interfaces tels que la cavitation. Les mécanismes de fissurations sont rappelés dans la partie § II.3.3.a, en traitant des mécanismes d'endommagement par fatigue.

II.2.2.a Modèles basés sur des champs locaux

GENT et PARK [1984] ont étudié le cas de l'expansion d'une cavité sphérique dans un milieu élastique infini et ont montré l'existence d'une contrainte critique de rupture égale à $5/6$ du module élastique du milieu infini.

La présence de charges dans un matériau entraîne trivialement des concentrations de contraintes au voisinage de celles-ci. GENT et PARK [1984] ont montré que les contraintes réelles de cavitation, dans le cas d'une inclusion sphérique de rayon a , suivait une loi de type HALL-PETCH :

$$\sigma_c = AE + \frac{B}{\sqrt{2a}} \quad (\text{II.23})$$

avec A et B des constantes. Le premier terme de l'équation II.23 : AE représente la résistance d'une cavité noyée dans une matrice élastomérique (que l'on peut relier à la valeur $\frac{5E}{6}$). Le second terme indique que plus la cavité est petite, plus les contraintes nécessaires à la cavitation doivent être élevées.

En grandes déformations, l'utilisation de cette loi entraîne des instabilités, conduisant à une pression critique infinie.

GARISHIN et MOSHEV [2002] modélisent le comportement endommageable en grandes déformations, d'un élastomère chargé en traction à partir d'un critère sur la déformation d'une chaîne microscopique.

Pour ce faire, ils réalisent une discrétisation physique du matériau :

- un arrangement aléatoire de cellules reliées les unes aux autres par des segments caractérisés par une longueur et une résistance élastique FIGURE II.5(a)
- chaque cellule est, à son tour, modélisée par un cylindre (représentant la matrice) dans lequel se trouve une sphère schématisant une inclusion, *cf.* FIGURE II.5(b).

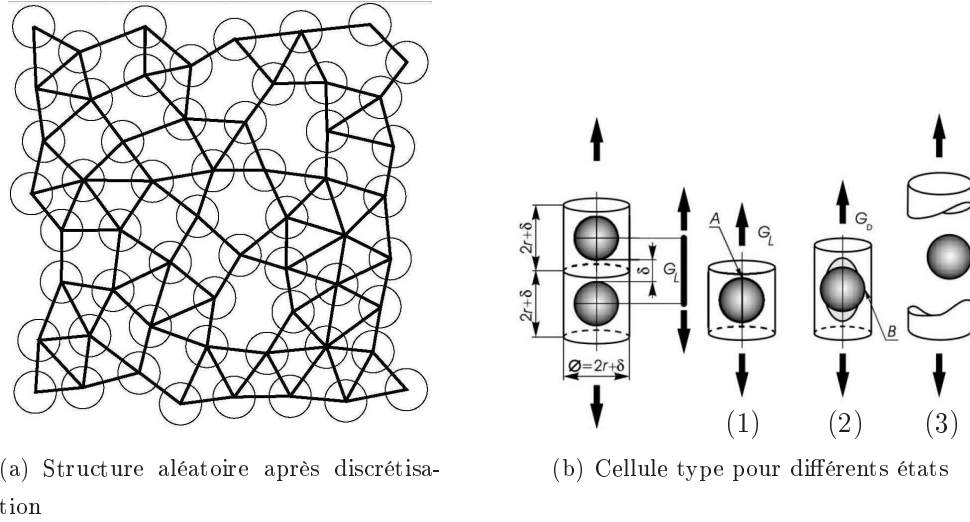


FIGURE II.5 – Représentation de la discrétisation du modèle de GARISHIN et MOSHEV [2002]

En tenant compte d'une certaine porosité entre les cellules, ils définissent la concentration locale de charge par :

$$\varphi_L = 0.907 \frac{V_{inclusion}}{V_{cylindre}} \quad (\text{II.24})$$

L'endommagement monotone est alors modélisé en distinguant trois états de cellules :

- 1^{er} état : Interface parfaite entre particule et matrice. La raideur d'une chaîne est donnée par :

$$G_L = 19.87 E_m r^2 \left(\frac{\delta}{r} \right)^{0.15 \ln(\frac{\delta}{r}) - 0.08} \quad (\text{II.25})$$

où E_m représente le module d'Young de la matrice et r le rayon d'une sphère,

- 2^{ème} état : Décohésion partielle entre particule et matrice (au niveau du point A sur FIGURE II.5(b)). Dans ce cas, le critère d'endommagement est défini en terme de déformation et la raideur d'une chaîne est donnée par :

$$G_D = \frac{(1 - 0.97 \varphi_L^{0.54})}{\left(1 + \frac{1.25 \varphi_L}{1 - \varphi_L/0.605}\right)^2} G_L \quad (\text{II.26})$$

- 3^{ème} état : décohésion complète entre matrice et particule. Cet état apparaît à partir d'une déformation critique ε_m^b de chaîne :

Le modèle de GARISHIN et MOSHEV [2002] prend en compte l'accumulation de l'endommagement dans le matériau, les variations de comportement mécanique ainsi que les champs d'interaction entre les particules. Il dépend cependant du nombre et de la géométrie des particules et reste fortement empirique.

On peut noter également les travaux réalisés par MATOUS *et al.* [2007], appliqués aux combustibles solides tels que des composites à matrice élastomérique. Ils développent, à partir de la théorie de l'homogénéisation périodique, un modèle de comportement macroscopique endommageable dont les mécanismes microscopiques d'endommagement sont essentiellement liés à des décohésions au niveau des interfaces charge/matrice.

La loi, dite de cohésion, qu'ils développent est basée sur des modèles de fissuration progressive qui relient les efforts cohésifs (normaux et tangentiels) de traction au niveau d'une charge, aux déplacements (normal et tangentiel) d'ouverture. Ils arrivent alors à l'écriture d'un paramètre d'endommagement qu'ils notent γ , tel que :

$$\gamma = \left\langle 1 - \sqrt{\left(\frac{\chi_n}{\chi_{n_c}}\right)^2 + \left(\frac{|\chi_t|}{\chi_{t_c}}\right)^2} \right\rangle \quad \forall \chi_n \geq 0 \quad (\text{II.27})$$

où χ_n et χ_t sont les déplacements d'ouverture normal et tangentiel au niveau de la charge et $\langle . \rangle$ traduit la partie positive.

Une fois que γ a dépassé la valeur initiale, $\gamma_{in} = 0.98$, γ diminue et l'interface est considérée localement endommagée. Parallèlement à la décroissance monotone de γ , l'interface se dégrade jusqu'à ce que γ atteigne la valeur nulle, dans quel cas l'interface est supposée complètement endommagée.

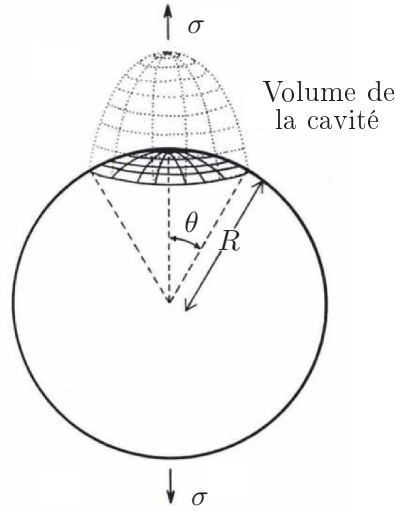
Il faut noter ici la décroissance du paramètre d'endommagement de γ_{in} vers 0.

Ce modèle est pour le moment restrictif, puisqu'il ne décrit qu'un comportement linéaire, totalement irréversible et qu'il n'est pas capable de rendre compte d'un endommagement induit par un chargement en compression.

II.2.2.b Modèles basés sur des critères énergétiques

Les critères de cavitation présentés ci-dessus ne tiennent, la plupart du temps, pas compte des énergies de rupture des liaisons matrice/particules. Des critères faisant intervenir des énergies de surface sont présentés dans cette partie.

GENT [1980] modélise la décohésion entre charge et matrice comme la croissance d'une micro-cavité ou micro-fissure pré-existante lorsque l'énergie élastique stockée dépasse l'énergie nécessaire à la décohésion de la matrice. Pour la description de ce modèle, l'utilisation du critère de GRIF-FITH apparaît nécessaire *cf.* § II.3.3.a. Il suppose, en premier lieu, que le micro-défaut, initiateur d'endommagement, soit inhérent à la constitution de matériaux élastomériques chargés.

FIGURE II.6 – *Evolution du volume de la cavitation autour d'une particule sphérique*

GENT [1980] distingue deux zones sur l'interface : une zone détachée pour laquelle l'énergie de déformation est nulle et une zone collée qui ne sera affectée par la décohésion qu'une fois la contrainte, dans cette zone, ayant atteint la contrainte critique σ_c suivante :

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{8\pi E G_a}{6R \sin(2\theta)}} \quad (\text{II.28})$$

R est le rayon de l'inclusion, 2θ la taille de la décohésion et E le module d'YOUNG de la matrice.

WILLIAMS AND SHAPERY (1965), suivis de GENT AND WANG (1991), ont pris en compte, dans leurs modèles, des mécanismes de déchirement qui permettent d'augmenter considérablement cette contrainte critique. L'expression de l'énergie devient alors complexe puisqu'elle est reliée à des mécanismes microscopiques de ruptures de chaînes.

II.2.3 Modèles macroscopiques d'endommagement monotone

◦ Les travaux de AUBARD *et al.* [2002]

AUBARD *et al.* [2002] développent un modèle de comportement hyper-élastique endommageable. L'hypothèse sur laquelle est basée ce modèle est l'**unilatéralité** de l'endommagement. En effet, lors d'un essai de compression, les fissures (ouvertes en traction) se referment et les caractéristiques mécaniques originelles du matériaux sont recouvrées. Pour ce faire, ils décomposent l'énergie de déformation en deux parties : une partie positive, liée aux essais de traction qui portera l'endommagement, et une partie négative pour la compression :

$$W(\bar{\bar{E}}, d_i) = W^+(\bar{\bar{E}}, d_i) + W^-(\bar{\bar{E}}) \quad (\text{II.29})$$

Les variables d'endommagement d_i sont liées aux paramètres C_i de la densité d'énergie W choisie sous la forme du modèle de HART-SMITH, tels que $C_i = (1 - d_i)C_i^0$.

La décomposition de $W(\bar{\bar{E}}, d_i)$, n'étant pas triviale, ils utilisent des conditions d'imcompressibilité pour définir de nouveaux invariants I_i^+ et I_i^- : les parties positives et négatives des invariants de déformation.

À partir de ces nouvelles grandeurs, la loi d'état permet d'obtenir le second tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF $\bar{\bar{S}}$, ainsi que les forces thermodynamiques, Y_i , associées aux variables d_i tels que :

$$\bar{\bar{S}} = \frac{\partial W(\bar{\bar{E}}, d_i)}{\partial \bar{\bar{E}}} \quad (\text{II.30})$$

$$Y_i = - \frac{\partial W(\bar{\bar{E}}, d_i)}{\partial d_i} \quad (\text{II.31})$$

La loi d'évolution de l'endommagement, $\dot{d}_i = f(Y_i)$, est identifiée à partir d'essais expérimentaux dans le cas du cisaillement. Les auteurs arrivent, ainsi, à une loi de la forme :

$$\begin{cases} d_i = \min \left(\left\langle \frac{\sqrt{Y_i} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c}} \right\rangle_+, 1 \right) \\ Y_0 \text{ et } Y_c \text{ paramètres matériaux} \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

Ce modèle original prend en compte l'aspect unilatéral du comportement des élastomères et permet l'étude de ce matériau jusqu'à des déformations de 600 à 700%.

Cette approche phénoménologique est certes limitée, mais elle a l'avantage de nécessiter peu de paramètres à identifier.

◦ Les travaux de ANDRIEUX *et al.* [1997]

Ce modèle part du principe que la décohésion des charges au sein d'un matériau entraîne une variation de volume et donc une compressibilité induite par endommagement. Le modèle de ANDRIEUX *et al.* [1997] a été développé pour des matériaux purement hyper-élastiques, incompressibles à l'état non endommagé.

Les auteurs introduisent une condition de liaison entre la variable d'endommagement et la variation de volume. Pour ce faire, ils décomposent en premier lieu le gradient de la transformation $\bar{\bar{F}}$, en une partie volumique $J = \det \bar{\bar{F}}$ et une partie déviatorique $\underline{\bar{\bar{F}}}$ tel que $\bar{\bar{F}} = J^{1/3} \underline{\bar{\bar{F}}}$. L'endommagement est pris en compte par l'introduction classique d'une variable interne scalaire d : $W(\underline{\bar{\bar{B}}}, d) = (1 - d)W_0(\underline{\bar{\bar{B}}})$ où $\underline{\bar{\bar{B}}}$ est la partie déviatorique du tenseur des déformations de CAUCHY-GREEN. La variation de volume est alors décrite par la relation suivante :

$$J = g(d) \quad \text{où} \quad J^2 - [g(d)]^2 = 0 \quad (\text{II.33})$$

où $g(d)$ est une fonction positive et croissante vérifiant $g(d = 0) = 1$.

Le second principe de la thermodynamique, couplé à cette condition de liaison, entraîne :

$$\begin{cases} \bar{\tau} = \bar{\tau}_s + \bar{\tau}_d \text{ avec } \bar{\tau}_s = rJ^2\bar{1} \text{ et } \bar{\tau}_d = 2(1-d)\left[\bar{\underline{B}}\frac{\partial W_0(\bar{\underline{B}})}{\partial \bar{\underline{B}}}\right] \\ Y = Y_s + \underline{Y} \text{ avec } Y_s = rg(d)g'(d) \text{ , } \underline{Y} = W_0(\bar{\underline{B}}) \text{ , } Y\dot{d} > 0 \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

avec r , un multiplicateur de LAGRANGE.

La complexité réside ensuite en l'élaboration d'une loi d'évolution de l'endommagement. Les auteurs montrent alors qu'une loi associée mène à un couplage difficile à surmonter numériquement. En considérant comme SIMO [1987] que seule la partie déviatorique de Y intervient dans l'endommagement, ils arrivent à un modèle non associé, moins naturel, mais plus simple puisqu'il ne présente plus de problèmes numériques.

Il apparaît donc que l'introduction d'une variation de volume induite par l'endommagement demande quelques précautions. Les travaux de ANDRIEUX *et al.* [1997] montrent les difficultés à surmonter, sans aller jusqu'à la mise au point d'un modèle complet adapté à un matériau réel.

◦ Les travaux de BIKARD [2002]

BIKARD [2002] propose une alternative aux modèles précédents en développant un modèle de comportement « micro-physiquement motivé » hyper-élasto-visco-plastique à variables internes, basé sur la thermodynamique des processus irréversibles.

L'endommagement y est intégré grâce un couplage avec les déformations élasto-plastiques. L'originalité de ce modèle réside principalement dans la prise en compte de l'endommagement par **croissance de cavités** uniquement, hypothèse initialement faite par ROUSSELIER [1987] dans le cas de métaux.

Les mécanismes élasto-plastiques sont alors divisés en une partie déviatorique, supposée incompressible et une partie sphérique qui caractérise l'apparition de vide autour des charges (répartition radiale des contraintes autour des charges).

Par l'introduction de la notion de porosité, reliée à l'apparition de cavitation, l'auteur développe un modèle de comportement des élastomères chargés à **compressibilité induite par endommagement**.

Nous avons donné dans ce chapitre une description des mécanismes de décollement sous chargement monotone : la cavitation et le décollement, ainsi que certains modèles de comportement microscopiques et maroscopiques de ces mécanismes, dans le cas de matériaux élastomériques chargés.

II.3 La fatigue : endommagement sous chargement cyclique

La dernière partie de cette synthèse bibliographique concerne les mécanismes d'endommagement par **fatigue** des élastomères chargés. La plupart des investigations, liées à la fatigue de matériaux élastomériques, s'est principalement axée vers l'étude de la durée de vie et non vers l'étude de l'évolution du comportement, au fur et à mesure de l'avancée du processus d'endommagement au sein d'un matériau. Ces études, visant à évaluer la durée d'utilisation probable d'une pièce en élastomère, ne traitent donc pas spécifiquement du phénomène de fatigue et de son évolution mais de l'évaluation du nombre de cycles à rupture.

De la même façon que pour la description de l'effet Mullins et de l'endommagement sous chargement monotone, nous donnons dans une première partie une description des phénomènes microscopiques puis macroscopiques. Nous présentons, enfin, quelques modèles de comportement en fatigue qui regroupent des modèles de durée de vie, ainsi que des modèles d'évolution du comportement vis-à-vis de la fatigue.

II.3.1 La fatigue à l'échelle micro...

L'étude microscopique des mécanismes d'endommagement des matériaux élastomériques chargés est complexe. Les techniques expérimentales simples permettent de réaliser des observations fines de la surface d'une éprouvette au cours d'un essai, ou encore à cœur après "découpage" de l'éprouvette, mais en imposant toujours l'arrêt de l'essai.

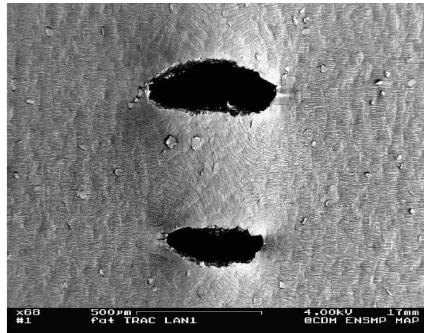
Du fait de la forte dépendance des élastomères vis-à-vis du temps et de la température, l'arrêt d'un essai, le déplacement d'une éprouvette et son découpage entraînent des variations de comportement qui peuvent fausser l'observation microscopique des mécanismes internes liés à la fatigue du matériau.

Cependant, de nouvelles techniques expérimentales telles que la microscopie à balayage électronique, la spectroscopie à énergie dispersive, la tomographie par rayons X où la microtomie cryogénique (pouvant réaliser des coupes parfaites d'épaisseurs de $1\mu\text{m}$ à $150\mu\text{m}$) permettent d'observer de mieux en mieux les mécanismes d'initiation d'endommagement.

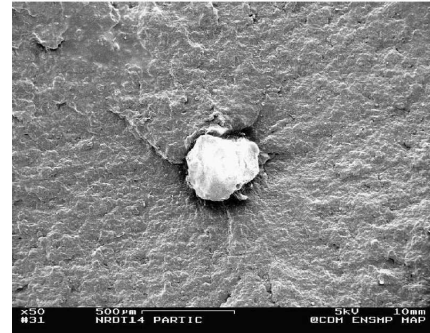
Lors de la fatigue uniaxiale ou multiaxiale d'un matériau chargé, les deux mécanismes d'endommagement principalement mis en jeu sont les mêmes que dans le cas de l'endommagement monotone :

- la décohésion, qui apparaît autour des inclusions rigides et qui laisse l'inclusion sans trace de matrice (FIGURE II.7(a)),
- et la cavitation que l'on retrouve au niveau des pôles d'aggrégats (FIGURE II.7(b)).

Ces deux phénomènes imposent alors une "conceptualisation" des zones d'interface entre matrice et charges, sièges d'amorçage de fissures qui se propagent ensuite plus ou moins rapidement, jusqu'à la rupture totale.



(a) Décohésion autour d'un agrégat



(b) Cavitation aux pôles d'une chage de silice

FIGURE II.7 – *Observations des mécanismes d'endommagement par fatigue dans un matériau chargé (SAINTIER [2001])*

SAINTIER *et al.* [2006] ont montré, dans le cas de charges diverses sous chargement multiaxial, que la propagation d'une fissure (soit l'allongement d'une fissure) de $100\mu\text{m}$ à 1mm dans la matrice se réalise lentement durant les 80 premiers pourcent de la vie du matériau. On qualifie alors de rupture ductile cette première étape d'endommagement.

Une description des phénomènes de propagation de fissures, ainsi que des faciès de rupture sont présentés dans LE CAM *et al.* [2004]. Ils mettent en évidence trois zones en pointe de fissure, qui diffèrent par leur microstructure induite des elongations dans chaque zone.

Comme pour les essais monotones, le type de charges (leur dispersion, la quantité et la forme de celles-ci) influe fortement sur l'endommagement. LAKE et LINDLEY [1964] ont mis, par exemple, en évidence à la fois le caractère positif de l'addition de charges de noir de carbone et l'influence de la taille de ces charges *cf.* FIGURE. II.8.

La nature de la matrice utilisée joue, elle aussi, sur le comportement en fatigue, *cf.* FIGURE. II.8. Les matrices cristallisables sous contrainte, par exemple, donnent de meilleurs résultats en terme de durée de vie que les matrices amorphes. En effet, lors du processus d'avancée de fissure, des fibres cristallisées apparaissent en pointe de fissure et ralentissent le processus.

Ces observations microscopiques, fruits d'expérimentations, sont les nouvelles sources d'interprétations et de modélisation, aujourd'hui qualifiées de "micro-mécaniques". Cependant de nombreuses recherches se sont basées et se basent encore sur des observations globales dites "macroscopiques" que nous traitons dans la partie suivante.

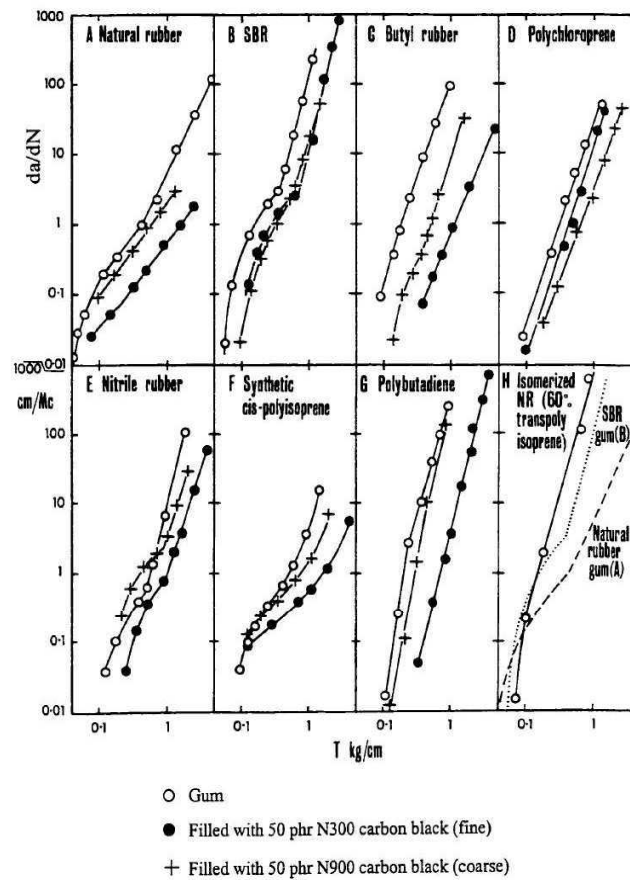
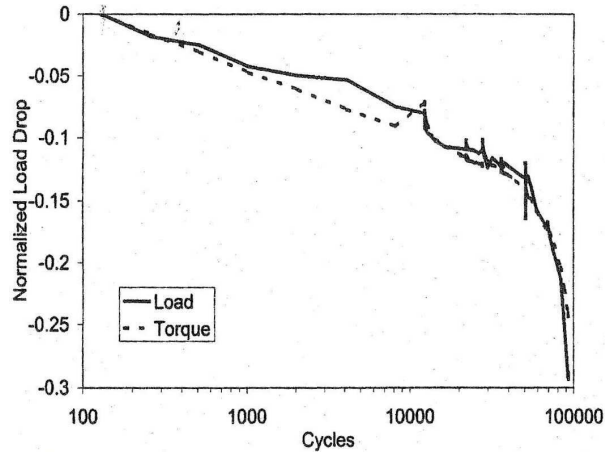


FIGURE II.8 – *Evolution de la propagation de fissure pour différents types d'élastomères chargés plus ou moins finement*(LAKE et LINDLEY [1964])

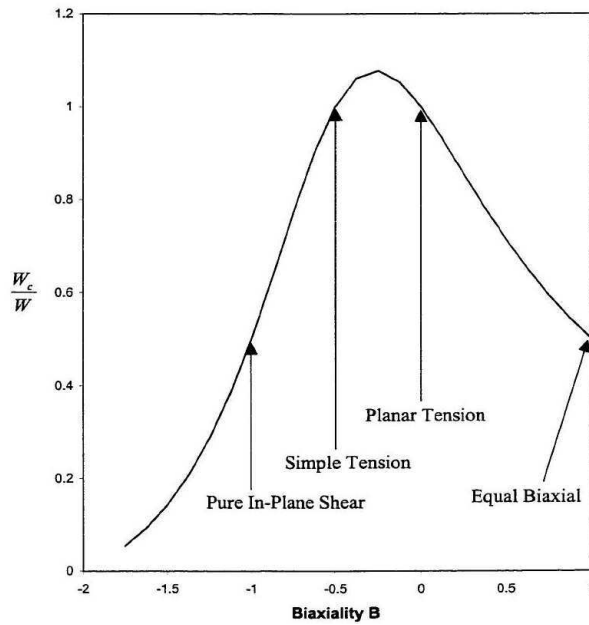
II.3.2 La fatigue à l'échelle macro...

D'un point de vue global, la fatigue d'un matériau se caractérise par une diminution des propriétés physiques, résultat d'une propagation de fissure. MARS [2002] observe clairement ces évolutions à partir d'essais de torsion/cisaillement sur un caoutchouc naturel chargé, présentées sur la FIGURE II.9.

La question prédominante dans l'écriture d'un modèle de comportement est "quels sont les facteurs qui influencent le comportement?". Pour y répondre, nous avons synthétisé les conclusions d'un grand nombre de campagnes expérimentales, menées depuis une cinquantaine d'années, sur la fatigue des élastomères, qui nous paraissent être les plus pertinentes, quant à la suite de ce travail.

FIGURE II.9 – *Effet de la fatigue sur le comportement global (MARS [2002])*

• **Le type de sollicitations** La triaxialité des contraintes, donc la multiaxialité de la sollicitation joue un rôle primordial dans le comportement en fatigue des élastomères. LEGORJU-JAGO et BATHIAS [2002] ont montré l'influence de la pression hydrostatique en traction sur le nombre de cavitations et sur leur forme. Ils mettent aussi en avant, par tomographie par rayons X, des localisations de l'endommagement différentes suivant les types de chargements. De même, MARS [2001] met en évidence, *cf.* FIGURE II.10, l'effet de la biaxialité de la sollicitation sur la densité d'énergie de fissuration notée W_c .

FIGURE II.10 – *Effet de la biaxialité sur la densité d'énergie de fissuration (MARS [2001])*

• **La sollicitation** Les essais de fatigue cyclique peuvent être décrits par plusieurs paramètres dépendant les uns des autres : σ_{min} , σ_{max} , $\Delta\sigma$, σ_{moy} et le rapport $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$, cf. FIGURE II.3.2 (MARS [2001]).

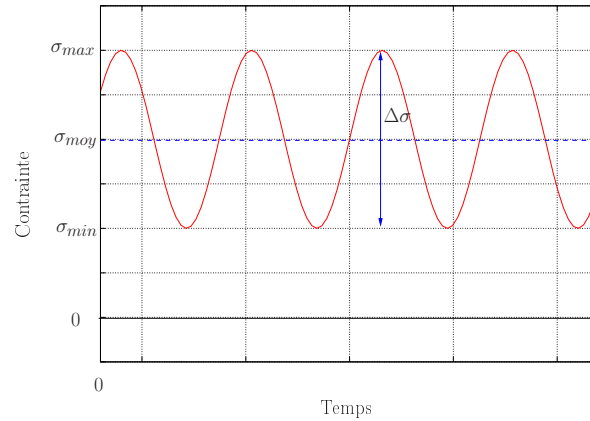


FIGURE II.11 – Les différents paramètres influents sur la fatigue

- **Effet des valeurs maximales :** LINDLEY, LEGORJU-JAGO et BATHIAS [2002], MARS [2001] ont montré l'influence néfaste d'une augmentation de la contrainte maximale, de l'énergie de déformation maximale et de la valeur maximale du taux de restitution d'énergie (T_{max}), sur le comportement en fatigue (comportement global et taux d'évolution d'une fissure). Le schema II.13 présente ces résultats.
- **Effet des contraintes minimale σ_{min} et moyenne σ_{moy} :** Ces paramètres ont des effets complexes sur la durée de vie, en fonction du type de matériau testé (cristallisable ou non, ainsi que du type de charges). Pour les matériaux cristallisables, ils ont un effet plutôt bénéfique sur la durée de vie, alors, que dans le cas des matériaux non cristallisables, ces effets peuvent être fortement négatifs.
- **Effet du rapport $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$:** Dans le cas de rapports positifs, LINDLEY a mis en avant l'influence positive d'une augmentation de R sur le taux d'évolution d'une fissure qui rejoint l'influence de σ_{min} .

• **La température :** L'influence de la température sur la durée de vie est fortement négative, spécialement dans le cas des élastomères amorphes. On peut noter, que l'augmentation de la température à coeur d'une éprouvette engendrée par un auto-échauffement, a le même effet dégradant sur le comportement que la fatigue d'un matériau. La question de "cause ou effet" de l'influence de la température sur le comportement se pose ici.

REMARQUE II.1

LI *et al.* [1995] ont montré que les processus d'endommagement par fatigue et ceux par vieillissement sous température engendraient des évolutions des propriétés mécaniques globales assez similaires mais des mécanismes microscopiques totalement différents. □

• **Les charges :** ALSHUTH et ABRAHAM [2002] ont travaillé sur l'influence des charges, vis-à-vis du comportement en fatigue. Ils montrent que les mêmes critères ne peuvent s'appliquer sur des matériaux chargés et non chargés ; l'exemple d'un critère en maximum de contrainte est présenté sur la FIGURE II.12. Pour un élastomère chargé, il semble que le nombre de cycles avant rupture dépende non seulement de σ_{\max} , mais également de tout l'intervalle de contraintes imposées ($\Delta\sigma$ ou σ_{\min}).

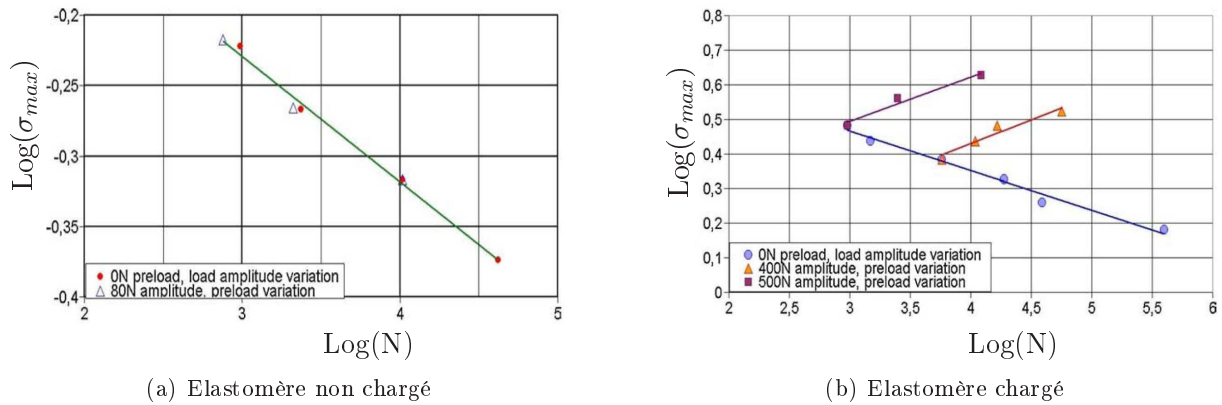


FIGURE II.12 – Effet de la présence de charges sur le comportement en fatigue (ALSHUTH et ABRAHAM [2002])

• **La fréquence :** L'effet de la fréquence est majoritairement observé pour les polymères amorphes. LAKE et LINDLEY [1964] montrent que le taux d'évolution de fissures, dû à la viscosité et à la fatigue (nombre de cycles) sont additifs. Ils montrent de plus que pour des déformations et des fréquences élevées, un nouveau mécanisme de fissuration, principalement thermique, apparaît.

En résumé, nous avons regroupé, ici, quelques éléments susceptibles de nous orienter dans la construction d'un modèle de comportement en fatigue. Tous les auteurs s'accordent sur le fait que l'influence de ces facteurs apparaît de façon fortement couplée et donc difficile à distinguer.

II.3.3 Modèles de comportement en fatigue

À partir de la connaissance des facteurs jouant sur le comportement en fatigue, des modèles plus ou moins complexes ont été développés. Leur objectif est principalement de prédire la ruine d'un matériau sous certaines sollicitations. Deux approches de la modélisation de la fatigue des élastomères se dégagent principalement du panorama bibliographique :

- une approche par propagation de fissures, qui définit le nombre de cycles nécessaire pour qu'une fissure pré-existante se propage jusqu'à ruine de l'éprouvette,
- une approche par nucléation, qui nécessite la connaissance du nombre de cycles pour lequel une fissure de longueur donnée est observée.

Nous développons dans cette partie ces approches puis débordons sur des modèles plus globaux, qui nous permettent de simuler le comportement d'élastomères chargés, au cours d'un processus d'endommagement par fatigue. L'objectif des derniers modèles n'est plus de prédire une localisation ou une taille limite de fissure, mais d'en modéliser les conséquences macroscopiques.

II.3.3.a Les critères de durée de vie

Les deux modèles de durée de vie, propagation de fissure et nucleation, vont dépendre de facteurs empiriques dont nous avons fait rapidement le point dans les parties ci-dessus § II.3.2.

• L'approche par nucléation

Cette approche de la durée de vie des matériaux a été initiée en 1860 par WÖHLER, dans le cas des aciers et a été étendue au cas des élastomères par RIVLIN et THOMAS [1953].

La durée de vie d'une pièce, décrite à partir de cette théorie, est définie comme le nombre de cycles nécessaire à l'apparition d'une fissure de taille donnée.

Le principal avantage de cette approche est qu'elle ne nécessite pas de connaissances préalables sur la présence de fissures internes, mais elle impose la connaissance du comportement en chaque point matériel afin de décrire les critères uniformément.

Les facteurs que nous retrouvons pour la description d'un critère de durée de vie sont les suivants :

- la déformation principale maximale (CADWELL (1940))
- la densité d'énergie de déformation, qui dans certain cas est proportionnelle au taux de restitution d'énergie,
- et la contrainte principale maximale (ABRAHAM *et al.* [2005])

Cependant la plupart des recherches menées jusqu'en 1995 à ce sujet ont montré l'incapacité de cette théorie à décrire la fatigue des matériaux élastomères sous chargement complexe.

Des études récentes, alliant l'approche par nucléation au cadre de la mécanique configurationnelle d'ESHELBY, ont permis de faire un pas en avant quant à la modélisation de l'initiation de fissures dans les matériaux élastomériques. C'est le cas des travaux de KIENZLER et HERRMANN [2002] par exemple. Cette approche permet de tenir compte des hétérogénéités, telles que des micro-fissures pré-existantes, directement dans l'écriture des équations d'équilibre.

L'idée même de cette approche est de partir des conditions d'équilibre configurationnelle qui tiennent compte des défauts micro-structuraux et de décrire un critère de fatigue directement sur ces grandeurs configurationnelles.

L'équation d'équilibre de la Mécanique des Milieux Continus, en grandes déformations, s'écrit

dans le cas d'un matériaux incompressible, sans force volumique, ni variation de température :

$$\operatorname{div}_X \bar{\bar{\pi}} = 0 \quad \text{en configuration Lagrangienne} \quad (\text{II.35})$$

avec $\bar{\bar{\pi}}$ est le premier tenseur de PIAULA-KIRCHHOFF.

Sans rentrer dans les details, l'équation d'équilibre de la MMC devient en mécanique configurationnelle, l'équation configurationnelle suivante :

$$\operatorname{div}_X \bar{\bar{\Sigma}} + G = 0 \quad \text{avec} \quad \bar{\bar{\Sigma}} = W\bar{\bar{1}} - \bar{\bar{F}}^T \bar{\bar{\pi}} = W\bar{\bar{1}} - \bar{\bar{C}}\bar{\bar{S}} \quad (\text{II.36})$$

où W est la densité d'énergie de déformation, $\bar{\bar{S}}$: le second tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF, dans la configuration de référence (espace physique "homogène").

$\bar{\bar{\Sigma}}$ est le tenseur des contraintes configurationnelles, noté aussi tenseur d'ESHELBY et G les forces configurationnelles associées.

Sur la base de ce modèle, VERRON *et al.* [2005] et ANDRIYANA [2006] définissent, à partir de résultats expérimentaux et d'une étude sur l'interprétation des composantes de Σ , une variable prédictrice de la fatigue Σ^* en chaque point matériel par :

$$\Sigma^* = \left| \min_{i=1,2,3} (\Sigma_i, 0) \right| \quad (\text{II.37})$$

où Σ_i , $i = 1,2,3$ sont les contraintes configurationnelles principales.

L'hypothèse principale de ce critère est que, seule la traction matérielle normale à la surface des défauts entraînent une ouvertures. Ce modèle peut prendre en compte à la fois le grossissement des défauts et dans certains cas le retrécissement.

VERRON et ANDRIYANA [2007] améliorent ce critère en prenant en compte l'histoire des déformations sur un cycle de chargement. Ils définissent d'abord un incrément du tenseur des contraintes configurationnelles $d\bar{\bar{\Sigma}}$ tel que $d\bar{\bar{\Sigma}} = \frac{d\bar{\bar{\Sigma}}}{d\bar{\bar{C}}} : d\bar{\bar{C}}$, puis à partir de l'écriture de cet incrément, ils décrivent un nouveau prédicteur de durée de vie, dépendant maintenant d'une partie endommageable du tenseur des contraintes configurationnelles $\bar{\bar{\Sigma}}^d$. Le modèle est défini comme suit :

$$\Sigma^* = \left| \min_{i=1,2,3} (\Sigma_i^d, 0) \right| \quad (\text{II.38})$$

avec Σ_i^d les contraintes principales de $\bar{\bar{\Sigma}}^d$ (valeurs propres), associées aux vecteurs propres \vec{V}_i

$$d\Sigma_i^d = \begin{cases} d\Sigma_i & \text{si } d\Sigma_i < 0 \text{ \& } \vec{V}_i \cdot \bar{\bar{\Sigma}} \vec{V}_i < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

$$\bar{\bar{\Sigma}}^d = \int_{\text{cycle}} d\bar{\bar{\Sigma}}^d \quad (\text{II.40})$$

Ainsi, quand $\Sigma^* > 0$, le défaut croît et tourne dans un plan orthogonal aux vecteurs propres \vec{V}^* , et si $\Sigma^* = 0$, la traction matérielle entraîne une réduction des défauts.

Ce critère de fatigue a été testé sur différents cas de chargement multiaxial, proportionnel ou non. Il a montré de très bons résultats en terme de modélisation de durée de vie et des résultats légèrement moins probants quant à l'orientation de la propagation de fissures dans le cas de chargements complexes non proportionnels.

• L'approche par propagation de fissure

L'idée initiale de cette approche est qu'il y a *évolution de fissures, s'il y a transformation d'une énergie potentielle emmagasinée dans le matériau en une énergie capable de créer une fissure dont l'aire de la surface est donnée.*

Ils supposent, pour développer ce modèle, qu'il y a toujours initialement présence de micro-défauts (où de micro-fissures), qui deviennent, par la suite, les lieux d'initiation d'endommagement.

L'évolution d'une fissure est donc décrite par une variable T , appelée *Taux de restitution d'énergie*, qui est calculée à partir de l'énergie potentielle P d'un corp fissuré, d'une fissure de surface d'aire A telle que :

$$T = -\frac{dP}{dA} \quad (\text{II.41})$$

Si l'on suppose que l'énergie totale d'un corps fissuré est la somme de l'énergie potentielle P et d'une énergie surfacique S , proportionnelle à la surface libre créée par l'avancée de la fissure telle que $S = 2\gamma A$, avec γ la densité surfacique d'énergie, on obtient un critère de fissuration, appelé critère de GRIFFITH de la forme :

$$\begin{cases} T \leq 2\gamma & \text{Pas de propagation} \\ T \geq 2\gamma & \text{Propagation} \end{cases} \quad (\text{II.42})$$

Ainsi une des difficultés majeures de cette approche est l'écriture de ce taux de restitution d'énergie qui dépend à la fois des essais réalisés, et de la forme des éprouvettes. Le cas le plus simple est celui de la traction simple pour lequel, dans le cas de petits défauts, on peut réaliser une factorisation de T , de la forme : $T = 2kW A$, où k est une constante de proportionnalité qui dépend de la déformation et W est la densité d'énergie de déformation.

La prise en compte du taux d'évolution de fissures, fonction du taux de restitution d'énergie, découle des résultats expérimentaux de LAKE et LINDLEY [1965], présentés sur la FIGURE II.13.

On voit ici, se dessiner différents régimes de comportements, dont le plus significatif quant à la modélisation de l'évolution de fissure, peut-être modélisé par des lois puissances de la forme :

$$\frac{dA}{dN} = f(T(A, W)) = BT_{max}^X \quad (\text{II.43})$$

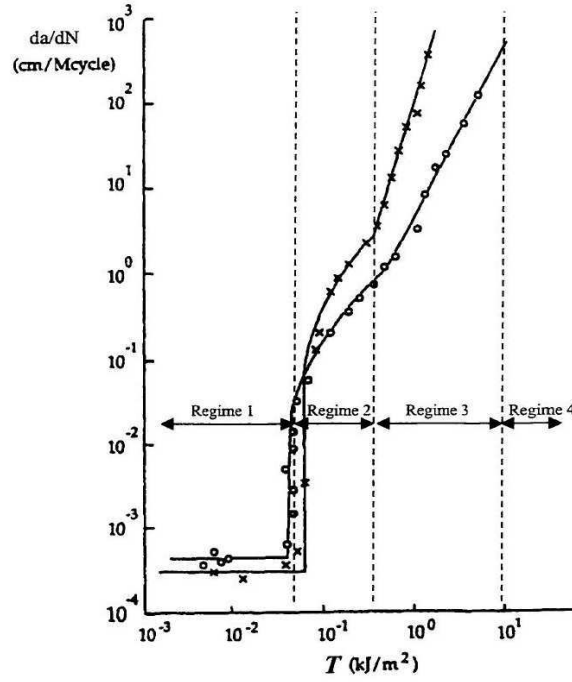


FIGURE II.13 – Effets de T_{max} sur le taux d'évolution d'une fissure (\times : SBR ; \circ : NR) (LAKE et LINDLEY [1965])

avec B et X des paramètres matériaux.

Dans le cas où T peut être factorisé en séparant la variable A , une relation directe entre la durée de vie et le facteur séparable apparaît. Dans le cas de la traction simple, si on note $T = KW_{max}A$, on obtient en supposant que la longueur initiale de la fissure est A_0 :

$$\frac{dA}{dN} = B(KW_{max}A)^X \quad \Rightarrow \quad N_{fin} = \frac{1}{(X-1)} \frac{1}{B(KW_{max})^X} \frac{1}{A_0^{X-1}} \quad (\text{II.44})$$

D'autres modèles, faisant intervenir plus de paramètres (en ajoutant des dépendances avec le rapport $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$ par exemple) ont été développés et ont donné des résultats satisfaisants dans les cas où le taux de restitution d'énergie est directement relié à la densité d'énergie de déformation. Une liste de ces modèles d'évolution de fissures est présentée dans MARS [2001].

Ces modèles ne permettent cependant pas de prendre en compte le cas de fissures se développant à partir de fissures déjà orientées dans des directions spécifiques. C'est pourquoi, les recherches récentes touchant à la fissuration des élastomères sont tournées vers l'étude de la fissuration, dans le cas d'essais multiaxiaux. Nous allons décrire certains de ces modèles.

MARS [2002] fait intervenir une densité d'énergie qu'il appelle *densité d'énergie de rupture* W_c qui permet une factorisation du taux d'énergie de déformation plus générale. A partir d'un

vecteur unité \vec{r} normal au plan de la fissure ou du défaut, il définit deux vecteurs, un vecteur de contrainte : $\vec{\sigma}$ tel que $\vec{\sigma} = \vec{r}^T \bar{\vec{\sigma}}$ et un vecteur d'incrément de déformation $d\vec{\varepsilon}$ tel que $d\vec{\varepsilon} = d\bar{\vec{\varepsilon}}\vec{r}$. Ainsi, l'incrément de densité d'énergie de rupture est :

$$dW_c = \vec{\sigma} \cdot d\vec{\varepsilon} = \vec{r}^T \bar{\vec{\sigma}} d\bar{\vec{\varepsilon}}\vec{r} \quad (\text{II.45})$$

Le taux d'évolution de fissures devient alors dépendant de l'orientation de la fissure tel que :

$$\frac{dA}{dN} = B(KW_c A)^X \quad (\text{II.46})$$

Ce modèle qui présente de bons résultats s'applique principalement aux petits défauts et aux petites déformations (qui permettent que la direction \vec{r} soit constante durant un cycle).

SAINTIER *et al.* [2006] tiennent compte de deux rotations distinctes lors d'un essai de traction/compression - torsion :

- une rotation de la contrainte principale (*cf.* FIGURE II.14)
- une rotation matérielle repérée par la rotation d'une fissure (spécialement en grandes déformations) (*cf.* FIGURE II.14)

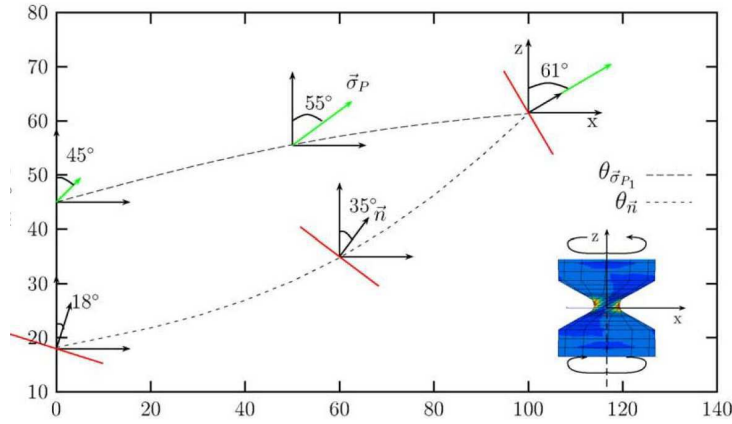


FIGURE II.14 – Comparaison entre l'angle de rotation de la contrainte principale et l'angle de rotation matérielle (SAINTIER *et al.* [2006])

Dans le but de comparer ces deux directions de rotation, qui ne sont pas définies dans le même espace, ils passent par un changement de configuration décrit par le vecteur normal \vec{n}_t :

$$\vec{n}_t = \frac{\bar{\vec{F}}_t^{-T} \cdot \vec{n}_{t_0}}{|\bar{\vec{F}}_t^{-T} \cdot \vec{n}_{t_0}|} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \sigma_{\vec{n}_t} = \vec{n}_t \cdot \bar{\vec{\sigma}}(t) \cdot \vec{n}_t \\ \tau_{\vec{n}_t} = \sqrt{|\bar{\vec{\sigma}}(t) \cdot \vec{n}_t|^2 - (\sigma_{\vec{n}_t})^2} \end{cases} \quad (\text{II.47})$$

où \vec{n}_{t_0} est le vecteur normal à la fissure initiale.

À partir de résultats expérimentaux, pour décrire une loi d'évolution de fissure dans le cas de matériaux cristallisables où non, ils définissent un prédicteur qui est le maximum de la contrainte principale de CAUCHY. Ils définissent ainsi une loi puissance pour l'évolution d'une fissure, telle que $N = \left(\frac{\Phi_{eq}}{\Phi_0}\right)^\alpha$ avec :

$$\Phi_{eq} = \frac{\Phi_{damage}}{1 + \Phi_{reinforcement}} \quad (\text{II.48})$$

$\Phi_{reinforcement}$ est nul dans le cas d'un matériau non cristallisable.

$$\Phi_{damage} = \max_{t \in [0; T]} (\sigma_n).$$

Ce modèle donne de bons résultats dans le cas de chargement multiaxiaux non proportionnels et permet, par l'utilisation d'un critère en contrainte, de tenir compte d'un endommagement hydrostatique.

ROBISSON [2000] fournit dans sa thèse un modèle de durée de vie, purement phénoménologique, qui s'appuie sur une large campagne expérimentale en fatigue. Son modèle dépend de deux paramètres mécaniques locaux que sont la déformation principale maximale Ep_{\max} et un paramètre, qu'elle appelle second invariant d'amplitude de déformations ΔE_{II} . Celui-ci est défini à partir du second invariant du tenseur des déformations de GREEN-LAGRANGE et prend la forme suivante :

$$\Delta E_{II} = \sqrt{\frac{1}{2} \Delta E_{ij} \Delta E_{ij}} \quad (\text{II.49})$$

ROBISSON [2000] note que l'écriture de ΔE_{II} peut s'avérer délicate dans un cas de chargement complexe. Le nombre de cycles à l'amorçage d'une fissure prend la forme :

$$N_i = 9500 \exp\left(\frac{-\Delta E_{II} + 0.321 Ep_{\max}^2 - 0.341 Ep_{\max} + 0.566}{0.112}\right) \quad (\text{II.50})$$

Ce critère a été établi à partir d'essais de torsion sur éprouvettes 'AE' et a montré son bon fonctionnement dans le cas d'autres types d'éprouvettes.

Nous venons de donner un aperçu des modèles récents, capables de prédire les durées de vie ainsi que les directions de propagation de fissure, pour les élastomères chargés, soumis à des chargements de plus en plus complexes. Ces critères ne donnent cependant pas de description simple de l'état du comportement pendant la fatigue. Les modèles que nous présentons dans la partie suivante tentent de donner l'évolution du comportement avec la fatigue et d'en modéliser les phénomènes.

II.3.3.b Les modèles d'endommagement continu

La plupart des modèles présentés dans cette partie se base sur la théorie d'endommagement continu développée par LEMAITRE et CHABOCHE [1985], que nous avons succinctement résumé au paragraphe § II.1.2.a. Cette théorie introduit une variable interne d'endommagement d , de type scalaire, vectorielle ou tensorielle suivant la description que l'on veut faire de l'endommagement, telles qu'elle soit associée à une force thermodynamique d'endommagement Y définie par $Y = \frac{\partial W}{\partial d}$.

◦ Les travaux de BO *et al.* [2002]

Le modèle qu'ils développent, entièrement basé sur la théorie d'endommagement continu dans le cadre des matériaux standards généralisés, tente de définir un lien entre la durée de vie en fatigue et l'amplitude de déformation. Le matériau est supposé ici, purement élastique, la densité d'énergie de déformation utilisée est de type OGDEN, où les déformations prises en compte sont les parties déviatoriques des dilatations principales. La variable d'endommagement D est définie à partir de la transformée de LEGENDRE FENCHEL du potentiel de dissipation, par $\dot{D} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial Y}$, en utilisant la un potentiel de dissipation que l'on retrouve pour traduire des endommagements de type plastique ductile (*cf.* LEMAITRE et CHABOCHE [1985]) :

$$\varphi^* = \frac{S_0}{s_0 + 1} \left(\frac{-Y}{S_0} \right)^{s_0 + 1} \quad (\text{II.51})$$

où S_0 et s_0 sont des paramètres matériau.

En supposant que l'évolution de l'endommagement puisse être décrite en terme de nombre de cycles : $\dot{D} = \frac{dD}{dN}$, BO *et al.* [2002] arrivent à une expression de la durée de vie en fatigue dans le cas d'une traction simple qui ne nécessite que de 4 paramètres matériaux.

◦ Les travaux de CANTOURNET [2002]

Nous avons déjà présenté, dans la partie II.1.2, le modèle d'hyperélasticité avec frottement interne de CANTOURNET [2002] pour modéliser le phénomène d'EFFET MULLINS. Afin de décrire également le comportement endommageable du même matériau, elle introduit une variable d'endommagement scalaire D par le biais d'une loi de type "endommagement plastique ductile" (*cf.* LEMAITRE et CHABOCHE [1985]).

Ainsi, en couplant cette loi au modèle hyperélastique avec frottement interne, ils obtiennent le potentiel thermodynamique et le pseudo-potentiel de dissipations, suivants :

$$\rho_0 \psi = (1 - D) \left[W_1(\bar{\bar{E}}) + W_2(\bar{\bar{E}} - \bar{\bar{\beta}}) \right] + \frac{1}{2} C \bar{\bar{\alpha}} : \bar{\bar{\alpha}} + G(r) \quad (\text{II.52})$$

$$F = f(\bar{\bar{S}}_2, \bar{\bar{X}}, R, D) + F_x(\bar{\bar{X}}) + F_D(Y, D) \quad (\text{II.53})$$

$$\text{avec } F_D = \frac{A}{a+1} \left(\frac{Y}{A} \right)^{a+1} \frac{1}{1-D} \quad (\text{II.54})$$

avec A et a des paramètres matériaux.

En appliquant la règle de normalité au pseudo-potentiel F_D , ils arrivent à la loi d'évolution de l'endommagement suivante :

$$\dot{D} = \left(\frac{Y}{A} \right)^a \dot{\beta}_{cum} \quad (\text{II.55})$$

avec β_{cum} , le taux de glissement cumulé.

En considérant un essai de traction simple, à élongation à rupture noté λ_R , ils estiment numériquement l'endommagement critique d'amorçage de fissures, D_c , par :

$$D_c = \frac{8\sqrt{3}C_{20}}{C_x A^a} \left(1 - \frac{24C_{20}}{C_x + 24C_{20}} \right) \int_{\lambda_0}^{\lambda_R} (W_1(\lambda) + W_2(\lambda))^a d\lambda \quad (\text{II.56})$$

où λ_0 est l'élongation à partir de laquelle l'endommagement apparaît.

De même, à partir d'essais expérimentaux, ils identifient une formule donnant le nombre de cycles à rupture, notée N_R par :

$$N_R = \frac{D_c}{\frac{\delta D}{\delta N}} \quad (\text{II.57})$$

Cette formule donne des résultats satisfaisants en fatigue et sous chargement monotone, sur une plage de nombres de cycles allant de 1 à 10^7 .

◦ Les travaux de DESMORAT *et al.* [2007]

DESMORAT *et al.* [2007] développent un modèle d'endommagement isotrope en petites déformations, pour les matériaux chargés, qui tient compte de deux échelles matérielles :

- l'échelle mésoscopique dite du Volume Élémentaire Représentatif (la matrice), dont le comportement est supposé thermo-élastique,
- et l'échelle microscopique des défauts (ou charges), modélisée par un comportement thermo-élasto-plastique à écrouissage linéaire cinématique, couplé à un endommagement plastique continu de type PRAGER

Deux points importants sont à noter :

- les auteurs tiennent compte de la non-symétrie de l'endommagement, celui-ci évolue ainsi plus doucement en compression qu'en traction,
- ils introduisent un seuil d'endommagement en densité d'énergie emmagasinée par écrouissage, noté ω_s^μ

Pour finir, ils supposent aussi que l'endommagement est constant par cycle et que la triaxialité des contraintes à l'échelle microscopique est constante, égale à son maximum au cours d'une charge ou d'une décharge.

Le passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique se fait par une loi de localisation de ESHLBY-KRÖNER qui utilise les paramètres a et b de la décomposition du tenseur d'ESHELBY suivante :

$$\begin{cases} \bar{\bar{\Sigma}} : \bar{\bar{1}} = a \bar{\bar{1}} \\ \bar{\bar{\Sigma}} : \bar{\bar{x}}^D = b \bar{\bar{x}}^D \end{cases} \quad (\text{II.58})$$

Ainsi ils peuvent définir un nombre de cycles à partir duquel il y a endommagement, ainsi qu'un nombre de cycles à rupture, défini pour une valeur critique de l'endommagement D_c , qui est introduit comme un paramètre matériau.

Les modèles ci-dessus fournissent des approches différentes de l'écriture de la loi d'évolution de l'endommagement, dans le cadre de la théorie d'endommagement continu. Ces modèles se restreignent souvent à des chargements uniaxiaux et à des comportements non dissipatifs, alors qu'on a vu dans le premier chapitre, que les élastomères sont à la fois hyperélastiques, visqueux et même plastiques. Tous ces comportements devraient être pris en compte pour le développement de modèles plus complets.

II.4 Synthèse de ces observations et modèles d'endommagement

Nous avons vu dans ce chapitre la complexité des phénomènes d'endommagement dans les élastomères. L'effet Mullins, l'apparition de fissures et leur propagation, la cavitation, sont des phénomènes difficiles à étudier sans même évoquer leurs actions couplées sur le matériau.

De nombreux auteurs se sont penchés sur ces phénomènes pour prédire le comportement des élastomères. Des méthodes micro-physiques (qui s'appuient sur des constatations microscopiques) et phénoménologiques ont ainsi été développées. Nous avons vu que la modélisation de l'effet Mullins donne de bons résultats via les deux approches. D'autres phénomènes ne sont modélisés, pour le moment que grâce à des modèles phénoménologiques locaux, inspirés d'essais réels. La cavitation, par exemple, reste un phénomène assez difficile à prédire, et peu étudié dans le cas des élastomères chargés. Les critères de rupture par propagation de fissure commencent à dépasser le stade phénoménologique et donnent des résultats de plus en plus probant, sous des conditions de chargements complexes, notamment grâce aux travaux de MARS [2001] et VERRON et ANDRIYANA [2007]. Les modèles phénoménologiques restent cependant limités intrinséquement par l'étendue de la campagne d'essais qui leur a servi de base et peinent à combiner les différents essais.

L'approche micro-physique est, de ce point de vue, la plus intéressante, aussi bien au niveau du développement des modèles que des résultats. En contre partie, elle est difficile à mettre en œuvre pour un matériau présentant une structure microscopique complexe et un comportement fortement dépendant de l'environnement, comme les élastomères. Nous avons vu que le modèle d'effet Mullins de GOVINDJEE et SIMO [1991, 1992] nécessite beaucoup d'hypothèses sur la micro-structure du matériau.

C'est pourquoi nous comptons nous positionner entre l'approche phénoménologique et micro-physiquement motivée dans cette étude.

CHAPITRE III

Campagne expérimentale

————— oOo —————

Nous présentons dans ce chapitre les résultats d'essais expérimentaux réalisés sur des éprouvettes de type haltère de traction et de double cisaillement, en matériau élastomère VHDS E1029, fournies par la société PAULSTRA. Dans un premier temps, nous ferons un rappel des résultats précédemment obtenus, concernant l'évolution du comportement du matériau non endommagé vis-à-vis de la déformation, la vitesse de sollicitation et de la température. Nous décrivons ensuite les deux campagnes expérimentales de fatigue (en traction et en cisaillement) réalisées pour la présente étude. Une méthodologie originale bien précise est établie pour la réalisation des essais : dans un premier temps, les éprouvettes sont soumises à des essais de fatigue cyclique pour différentes configurations (amplitudes statiques et dynamiques, fréquences) et à divers niveaux de fatigue (nombres de cycles), puis après chaque étape de fatigue, des essais de caractérisation sont réalisés sur ces mêmes éprouvettes.

Une analyse des courbes de caractérisation met en évidence l'influence de la fatigue sur le comportement du matériau.

————— oOo —————

PLAN DU CHAPITRE III

| | |
|--|-----------|
| III.1 Bilan des travaux antérieurs | 71 |
| III.1.1 Effet Mullins | 71 |
| III.1.2 Dépendance du comportement avec la sollicitation | 71 |
| III.1.2.a Influence de l'amplitude de sollicitation | 72 |
| III.1.2.b Influence de la vitesse de sollicitation | 73 |
| III.1.3 Influence de la Température | 73 |
| III.2 Présentation des essais de fatigue | 74 |
| III.2.1 Moyens expérimentaux | 75 |
| III.2.1.a Les éprouvettes | 75 |
| III.2.1.b Machines d'essais | 75 |
| III.2.1.c Essais préliminaires | 77 |
| III.2.2 Campagne expérimentale en traction | 78 |
| III.2.2.a Fatigue des éprouvettes | 78 |
| III.2.2.b Essais de caractérisation | 78 |
| III.2.3 Campagne expérimentale en cisaillement | 81 |
| III.2.3.a Fatigue des éprouvettes | 82 |
| III.2.3.b Essais de caractérisation | 86 |
| III.3 Analyse des résultats expérimentaux | 88 |
| III.3.1 Remarque générale | 88 |
| III.3.2 Evolution des essais caractéristiques de cisaillement | 89 |
| III.3.2.a Configuration de fatigue à amplitude dynamique de 12,5% . . . | 89 |
| III.3.2.b Configuration de fatigue à amplitude dynamique de 25% . . . | 90 |
| III.4 Conclusion | 92 |

III.1 Bilan des travaux antérieurs

Dans cette partie, nous allons présenter les résultats de la campagne expérimentale réalisée lors des travaux de thèse de MARTINEZ [2005], qui précèdent la présente étude. Nous nous consacrons principalement ici aux travaux les plus pertinents vis-à-vis de la suite de l'étude. Cette campagne a été réalisée sur des élastomères silicones VHDS E1029 chargés de silice, en cisaillement et en traction. L'objectif de ces rappels est de poser les bases du comportement de ce matériau **sans endommagement**. Nous verrons ainsi comment influent l'amplitude et la vitesse de sollicitation, ainsi que la température sur le comportement du matériau. L'effet Mullins, quant à lui, est mis en avant par le biais des courbes expérimentales.

III.1.1 Effet Mullins

Le matériau d'étude présente un fort assouplissement dû à l'Effet Mullins, phénomène mécanique que nous avons présenté au paragraphe § II.1.

Les courbes III.1(a), III.1(b) présentent cet assouplissement sur notre matériau d'étude. Il est clairement présent dans les essais de montée en charge (a) et durant une vingtaine de cycles (b).

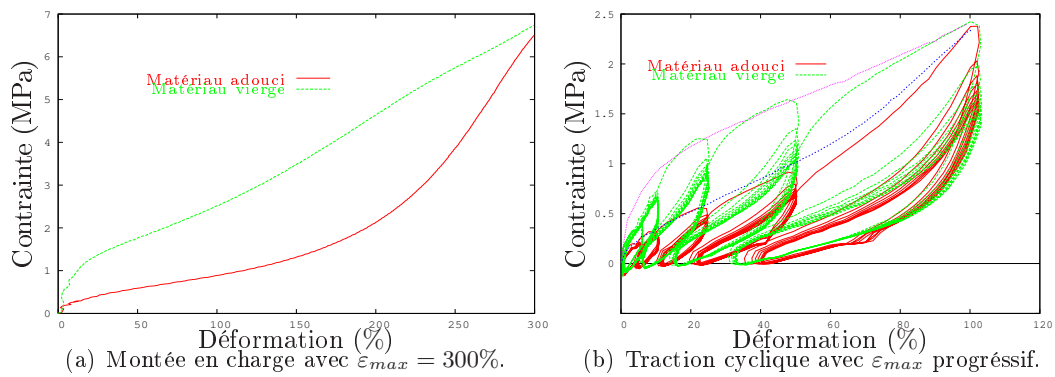


FIGURE III.1 – Observation de l'effet MULLINS à travers des essais de traction uniaxiale.

III.1.2 Dépendance du comportement avec la sollicitation

Nous présentons dans cette partie uniquement la synthèse des résultats de double cisaillement d'essais triangulaires. Les conclusions sur le comportement sont les mêmes dans le cas d'essais cycliques sinusoïdaux et d'essais de traction (toutes les courbes sont dans MARTINEZ [2005]).

L'analyse des résultats pourra être faite sur les courbes elles-mêmes et sur deux grandeurs :

- la raideur globale Υ , caractéristique de l'élasticité,
- l'énergie non libérée au cour d'un cycle $\Phi_{\text{cycle}}^{(1)}$. Cette grandeur est caractéristique de l'amortissement d'un système et s'écrit $\Phi_{\text{cycle}} = \int_{\text{cycle}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$

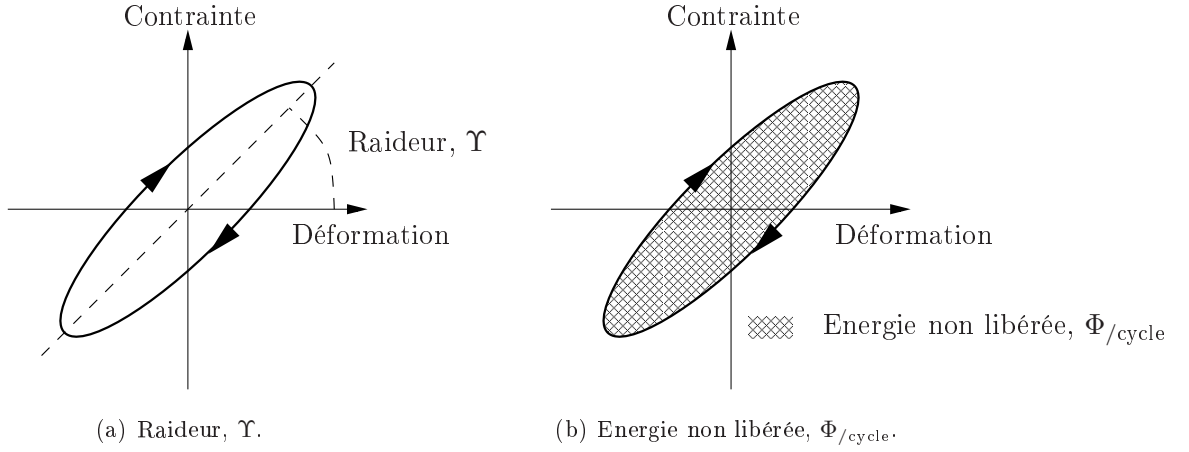


FIGURE III.2 – Présentation des grandeurs caractéristiques d'un essai cyclique stabilisé.

III.1.2.a Influence de l'amplitude de sollicitation

À partir d'essais expérimentaux réalisés pour différentes amplitudes de sollicitation, trois constations peuvent être faites :

- assouplissement du comportement suivant l'amplitude de déformation (cf. FIGURE III.3(a))
- augmentation de la dissipation avec l'amplitude de déformation (cf. FIGURE III.3(b))
- amplification de ces observations pour une baisse de température (cf. FIGURE III.3)

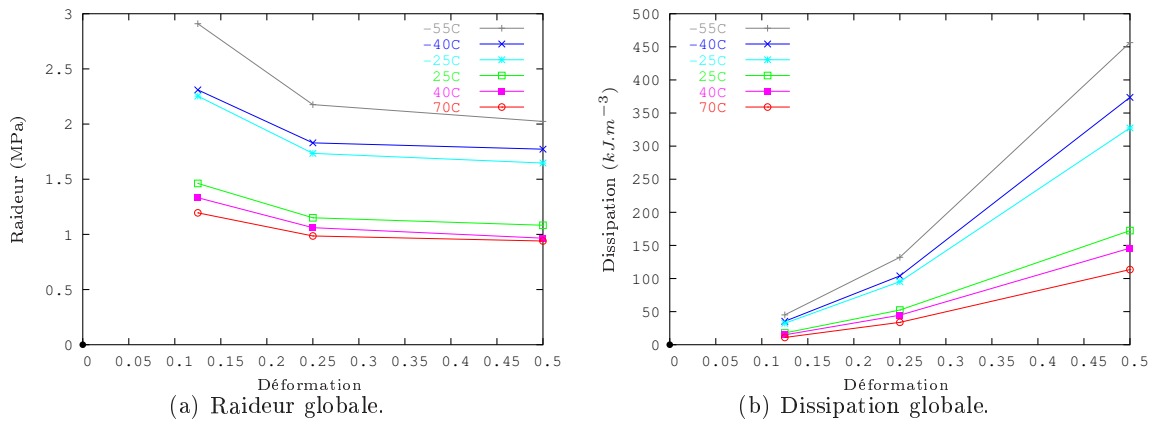


FIGURE III.3 – Evolution de la raideur et de la dissipation suivant l'amplitude de déformation pour une vitesse de cisaillement $\dot{\gamma} = \pm 0.3 s^{-1}$ ($\gamma = \bar{F}_{12}$), réalisés à différentes températures.

(1). Cette énergie non libérée Φ_{cycle} inclut la dissipation interne et l'énergie stockée, qui peut être bloquée à l'intérieur du matériau puis dissipée par des mécanismes d'endommagement, par exemple.

III.1.2.b Influence de la vitesse de sollicitation

À partir d'essais expérimentaux réalisés pour différentes amplitudes de sollicitation, trois constations peuvent être faites :

- rigidification du comportement global suivant le taux de déformation (*cf.* FIGURE III.4(a))
- augmentation de la dissipation globale avec le taux de déformation (*cf.* FIGURE III.4(b))
- les allures non linéaires de ces courbes s'atténuent avec la température (*cf.* FIGURE III.4)

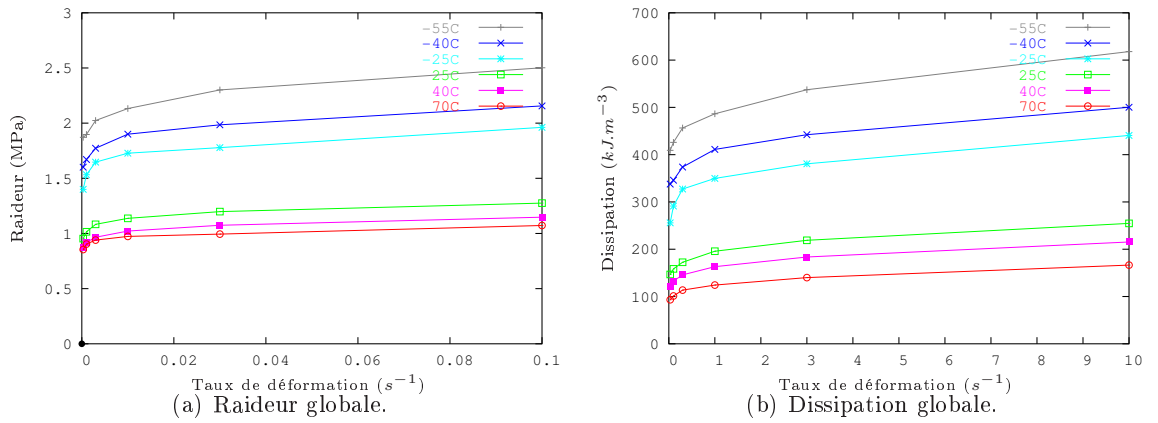


FIGURE III.4 – Evolution de la raideur et de la dissipation lors d'un essai DC, suivant la vitesse de déformation tels que $\gamma_{max} = 50\%$ ($\gamma = \bar{F}_{12}$), réalisés à différentes températures.

III.1.3 Influence de la Température

Nous avons déjà mis en évidence, sur les courbes précédentes, qu'une évolution de la température entraîne une évolution ou une accentuation du comportement. Sur les essais de relaxation, une diminution de température va engendrer une augmentation du taux de relaxation, intensifiée pour des températures inférieures à $-25^{\circ}C$, *cf.* FIGURE III.5.

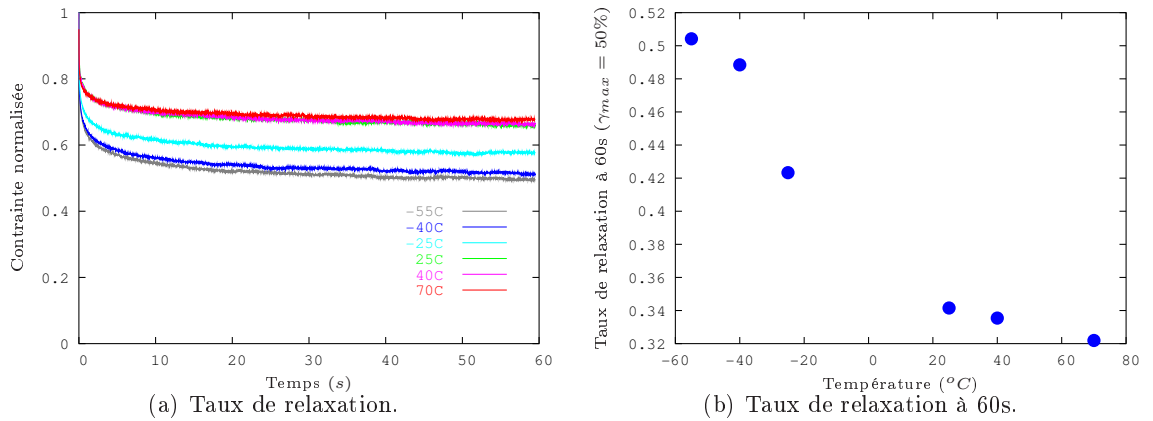


FIGURE III.5 – Evolution du taux de relaxation, au cours d'un essai de relaxation suivant la température, en double cisaillement ($\gamma_{max} = 50\%$).

Sur les essais cycliques, une augmentation de température engendre :

- une diminution de la raideur globale : un assouplissement, *cf.* FIGURE III.6(a)
- une diminution de la dissipation globale qui est fortement accentuée pour les grandes amplitudes de sollicitation, *cf.* FIGURE III.6(b).

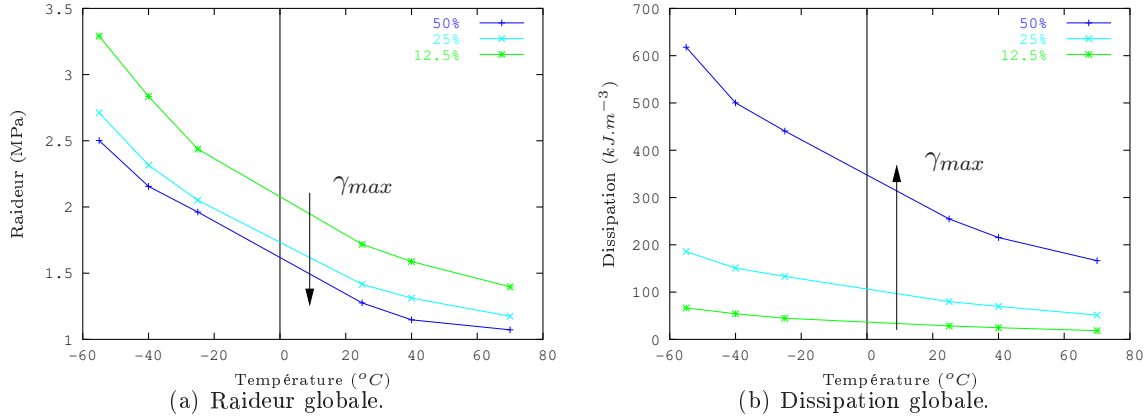


FIGURE III.6 – Evolution de la raideur et de la dissipation suivant la température tels que $\dot{\gamma} = \pm 10 \text{s}^{-1}$ réalisés à différentes amplitudes de déformation.

Toutes ces évolutions sont globalement connues dans le cas des élastomères chargés. La plage de températures testées ici a permis d'élargir les connaissances du comportement macroscopique. La suite de ce chapitre sera consacrée à l'étude expérimentale en fatigue du même matériau, sur des plages d'amplitudes et de fréquences de sollicitations à peu près identiques sans analyser l'influence de la température.

III.2 Présentation des essais de fatigue

L'objectif de cette campagne expérimentale est d'obtenir l'évolution du comportement de l'élastomère silicone chargé de silice VHDS E1029 vis-à-vis de la fatigue. Pour ce faire, des essais de fatigue cyclique en traction et en double cisaillement, ont été réalisés pour différentes amplitudes, différentes fréquences. Seule l'évolution de la température n'a pas été étudiée ici malgré le fort couplage qu'il existe entre endommagement par fatigue et température. Des observations futures seront réalisées pour mettre en avant ce phénomène.

Nous développons d'abord succinctement les moyens expérimentaux en termes de machines d'essais et d'éprouvettes mis en oeuvre dans cette campagne, puis nous exposons les divers essais réalisés en insistant sur l'ordre chronologique des essais de caractérisation (utilisés pour l'identification des paramètres du modèle de comportement) par rapport aux essais de fatigue.

III.2.1 Moyens expérimentaux

III.2.1.a Les éprouvettes

Nous rappelons ici que le matériau d'étude est un élastomère à matrice silicone chargé de silice, utilisé, entre autre, pour la fabrication des amortisseurs de fréquence.

Deux types d'éprouvettes sont testés :

- des éprouvettes de traction **haltère H2** normalisées, telles que les dimensions de la zone utile sont présentées sur la FIGURE III.7.

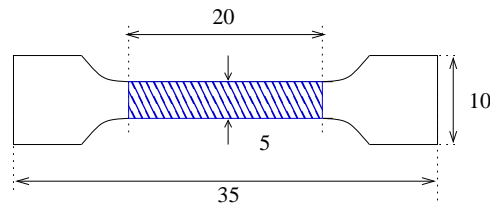


FIGURE III.7 – *Dimension des éprouvettes de traction*

- des éprouvettes de **double cisaillement avec ménisque**. Les dimensions ainsi que la géométrie de telles éprouvettes sont représentées sur la FIGURE III.8. La présence du ménisque pour ce type d'éprouvettes entraîne une localisation des contraintes au creux du ménisque ce qui évite des singularités et un maximum de contraintes au niveau de l'interface entre les armatures en aluminium et les lamelles d'élastomère, BOURGEOIS [1994].

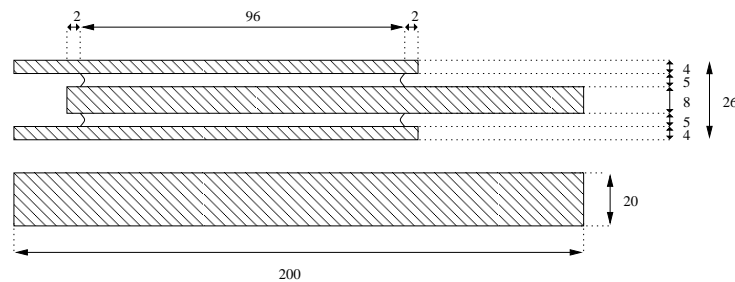


FIGURE III.8 – *Dimension des éprouvettes de double cisaillement*

III.2.1.b Machines d'essais

Les essais de traction ont été réalisés au centre de Mécanique Energétique de l'ancienne Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Marseille, nouvellement Ecole Centrale Marseille.

Deux machines d'essais ont été utilisées dans cette campagne :

- une machine dynamique de type SHENK pour la fatigue des éprouvettes,
- une machine ADAMEL LHOMARGY DY36 instrumentée d'un capteur de force de 1kN et d'un extensiomètre laser, pour les essais de caractérisation.

La campagne d'essais de cisaillement a été réalisée au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille sur une machine dynamique MTS-Model 322.21, voir la photo III.2.1.b. Le capteur d'effort utilisé a une capacité de 100kN. Tous les essais sont pilotés en déplacement de verrin, à différentes fréquences dont les plages d'utilisation dépendent fortement de l'amplitude des déplacements choisis.

Cette machine est de plus équipée d'une enceinte thermique de type CET que l'on peut observer sur la photo III.2.1.b.

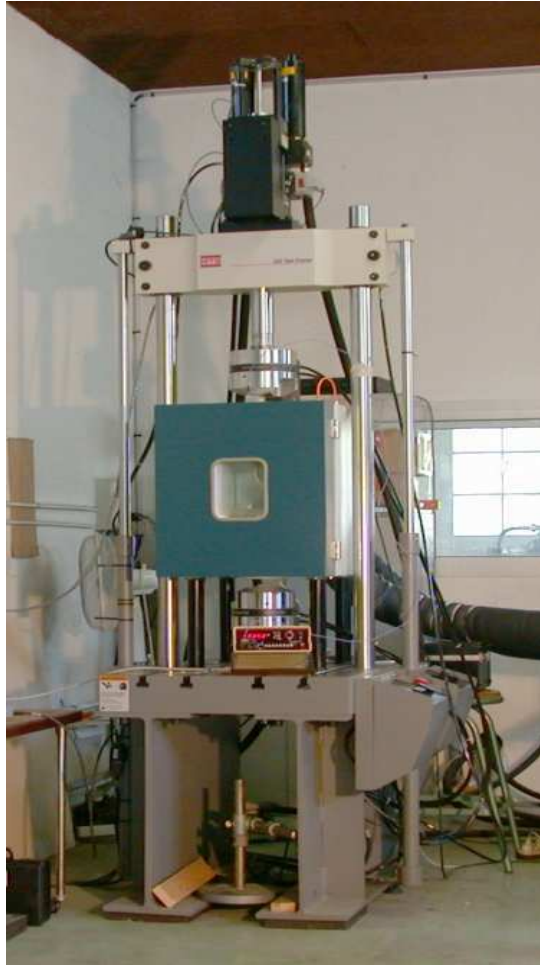


FIGURE III.9 – Machine d'essai avec enceinte thermique

Les résultats des essais réalisés pendant ces campagne sont présentés le plus souvent sous forme de courbes d'hystérésis : contrainte en fonction de la déformation. Les grandeurs utilisées sont présentées dans le tableau III.1.

| Essai | Déformation | Contrainte |
|---------------------|--|------------------------|
| Traction | $\bar{\bar{F}}_{11} - 1 = \varepsilon$ | $\bar{\bar{\pi}}_{11}$ |
| Double-Cisaillement | $\bar{\bar{F}}_{12} = \gamma$ | $\bar{\bar{\pi}}_{12}$ |

TABEAU III.1 – Grandeurs présentées pour l'analyse des essais expérimentaux.

III.2.1.c Essais préliminaires

■ Répétitivités du comportement des éprouvettes

Nous avons débuté cette campagne expérimentale par l'observation de la répétitivité du comportement des éprouvettes en traction et en cisaillement.

Dans le cas des essais de traction, nous avons constaté une dispersion de comportement allant jusqu'à 10%, mais qui s'estompe avec l'augmentation de l'amplitude des déformations subie par le matériau. Les courbes FIGURE III.10 présentent les réponses à un essai de relaxation (après fatigue à 25% et à 100%) sur 3 éprouvettes différentes, mais ayant subies le même nombre de cycles de fatigue (ici 1000 cycles). Par conséquent, pour caractériser le comportement du matériau en traction, nous travaillerons à partir d'un comportement moyen, tout en sachant qu'il peut y avoir des effets de dispersion.

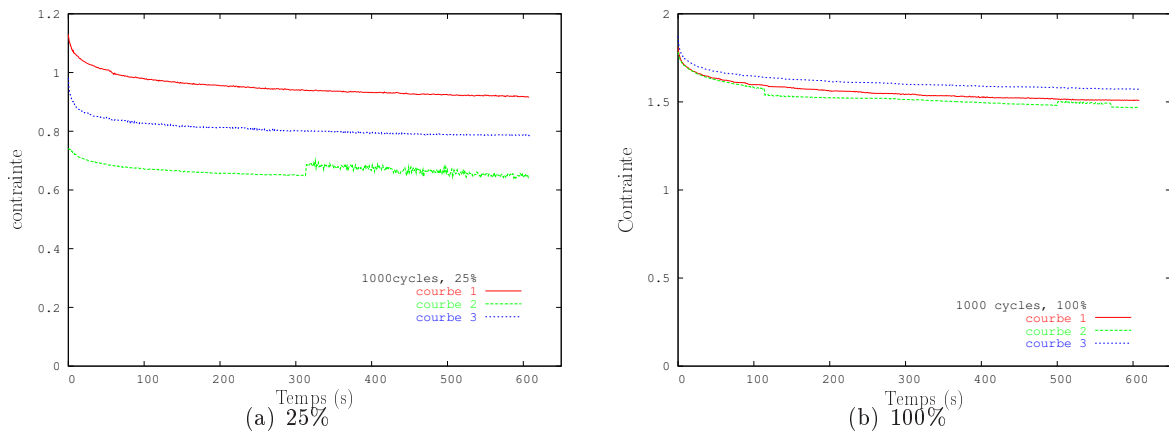


FIGURE III.10 – Dispersion des résultats en traction

En ce qui concerne la campagne d'essais en cisaillement, nous présentons l'étude de la répétitivité du comportement sur deux éprouvettes, *cf.* FIGURE III.11. La similitude des comportements obtenus, nous permet de conclure qu'il n'est pas nécessaire de réaliser un essai sur plusieurs éprouvettes.

■ Élimination de l'Effet Mullins

Dans la campagne de cisaillement, toutes les éprouvettes ont, au préalable, subi **20 cycles d'adoucissement**, c'est à dire 20 cycles à une déformation largement supérieure à celle que subira le matériau tout au long de son histoire. Nous avons choisi arbitrairement de réaliser ces 20 cycles à 150% de déformation et à 0,5Hz. Ceci permet de palier à l'effet Mullins, important dans ces éprouvettes chargées, comme nous l'avons présenté sur les figures III.1(a) et III.1(b) du paragraphe § III.1.1.

A priori, une fois l'éprouvette assouplit, le comportement est stabilisé, le phénomène d'adoucissement cyclique n'intervient plus dans le comportement du matériau.

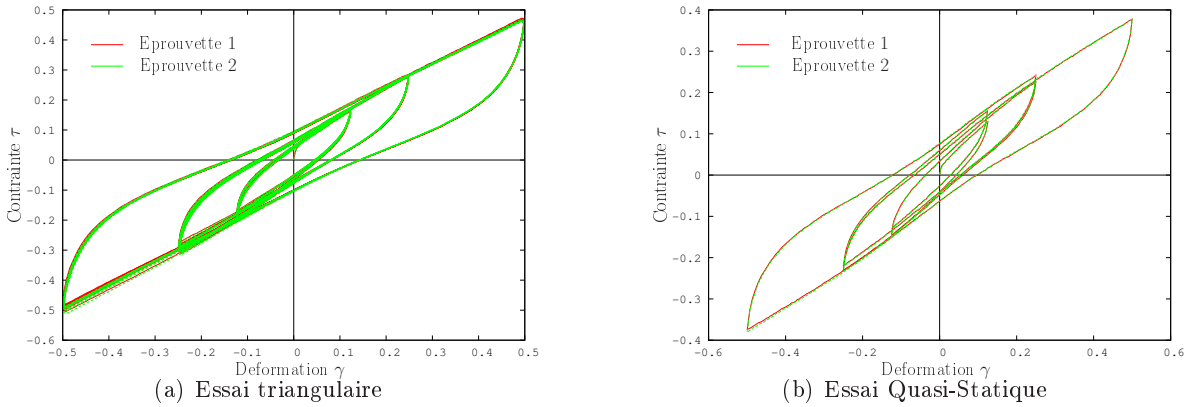


FIGURE III.11 – Répétitivité des résultats

III.2.2 Campagne expérimentale en traction

Cette première campagne expérimentale avait pour but de mettre en avant l'endommagement en traction dans les élastomères chargés. Des essais de fatigue cyclique, suivis d'essais de caractérisation ont été testés et ont permis par la suite l'étude de l'endommagement. Nous présentons ici les résultats expérimentaux ainsi que les difficultés qu'a entraînées une telle campagne expérimentale de fatigue sur des éprouvettes de type H2.

III.2.2.a Fatigue des éprouvettes

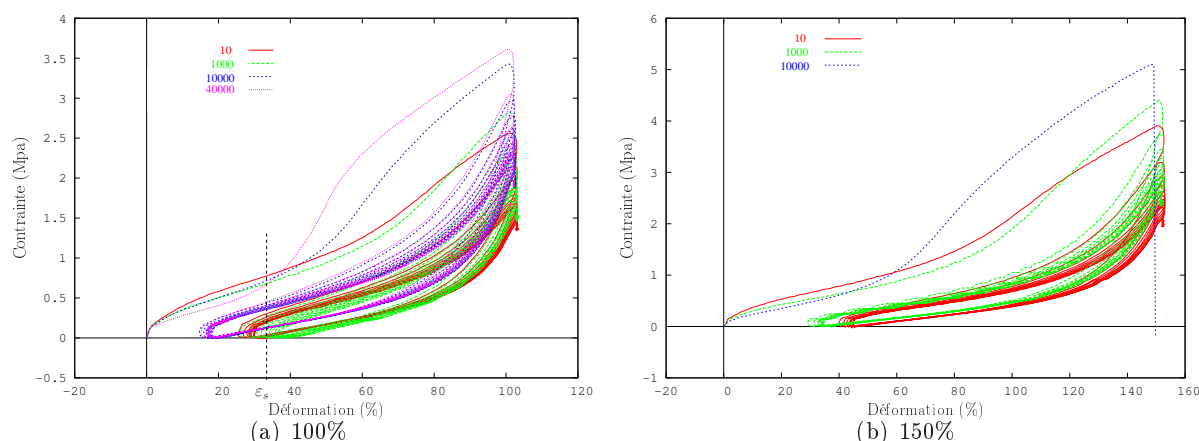
Pour fatiguer les éprouvettes, nous leur avons fait subir, dans un premier temps, des essais cycliques (essais sinusoidaux) :

- à différentes configurations : $25\% \pm 25\%$, $50\% \pm 50\%$, $100\% \pm 100\%$ et $150\% \pm 150\%$ d'amplitude de déformation et à 0,5Hz
- et pour divers niveaux de fatigue : 10, 1000, 10000, 40000 et 100000 cycles.

Ces éprouvettes fatiguées à diverses configurations doivent permettre l'étude de l'évolution du comportement en traction avec la fatigue. Pour ce faire après deux jours de repos, les éprouvettes sont soumises à des essais de caractérisation qui seront, par la suite, utilisés pour identifier les paramètres de modèles de comportement.

III.2.2.b Essais de caractérisation

Avant la réalisation des essais caractéristiques, dix cycles d'assouplissement sont soumis aux éprouvettes fatiguées. Ces cycles avaient, initialement, pour but de stabiliser le comportement du matériau (effacer l'effet Mullins), mais ils ont finalement mis en avant la présence d'un couplage entre l'endommagement par fatigue et l'effet Mullins (*cf.* FIGURES III.12), ce qui a fortement conditionné la forme des essais caractéristiques.

FIGURE III.12 – *Premier cycles d'adoucissement: Effet Mullins ou endommagement?*

Ces courbes III.12 permettent de définir expérimentalement l'existence d'une **déformation seuil** ε_s en-dessous de laquelle le comportement est endommagé par fatigue et au-dessus de laquelle l'éprouvette est endommagée au sens de l'effet Mullins. Cette déformation seuil est mesurée pour chaque configuration, de façon plus ou moins arbitraire, à partir des courbes expérimentales FIGURES III.12. Les grandeurs obtenues sont résumées dans le tableau III.3.

| Amplitude dynamique en fatigue | Déformation seuil ε_s |
|-----------------------------------|--------------------------------------|
| 25% | 15% |
| 50% | 20% |
| 100% | 30% |
| 150% | 60% |

TABLEAU III.2 – *Correspondance entre déformations de fatigue et déformations seuil*

Notre interprétation de ce couplage entre l'effet Mullins et l'endommagement par fatigue, s'appuie essentiellement sur une perte de repère de la zone utile de l'éprouvette, lors du passage d'un essai de fatigue aux essais de caractérisation (du fait d'un changement de machine entre ces deux essais). Il semble alors que la déformation maximale, que nous avons imposée lors des essais d'assouplissement, soit largement supérieure à celle imposée lors des essais de fatigue.

Enfin, dans le but de caractériser un comportement endommagé par fatigue, les essais caractéristiques sont réalisés sur les éprouvettes fatiguées, sans dépasser la déformation seuil ε_s .

Ainsi, les essais de caractérisation qu'ont subies les éprouvettes fatiguées se composent de :

- 10 cycles à amplitude maximale de 15% pour les éprouvettes fatiguées à $25 \pm 25\%$, $50 \pm 50\%$ et $100 \pm 100\%$ et à amplitude maximale de 60% pour les éprouvettes fatiguées à $150 \pm 150\%$, en gardant la contrainte toujours positive telle que sur la FIGURE III.13,
- suivis d'un **essai de relaxation** à 15% ou 60% de déformation.

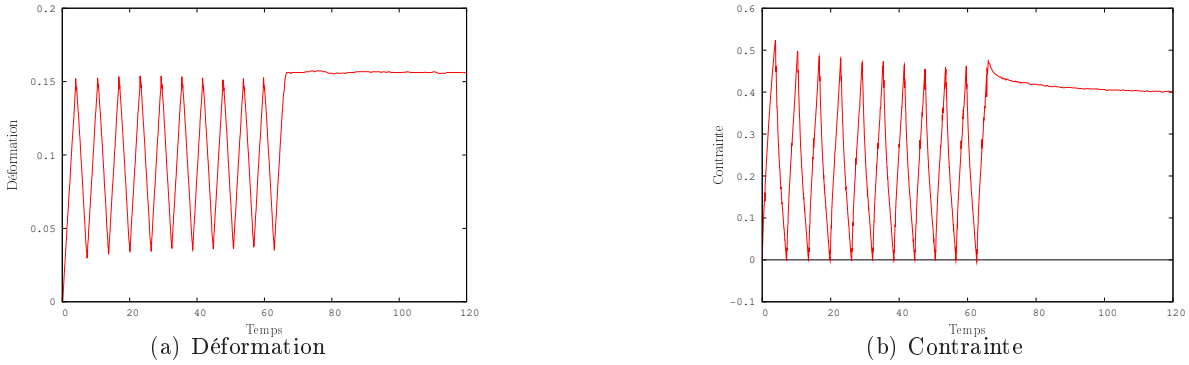


FIGURE III.13 – Sollicitation et réponse d'un essai de caractérisation en traction à $\varepsilon_s = 15\%$

Les réponses aux essais caractéristiques que nous obtenons présentent un assouplissement du comportement global et une diminution de l'énergie non libérée (aire de l'hystérésis) avec la fatigue. Nous regroupons ces réponses sur les FIGURE III.14 et III.15.

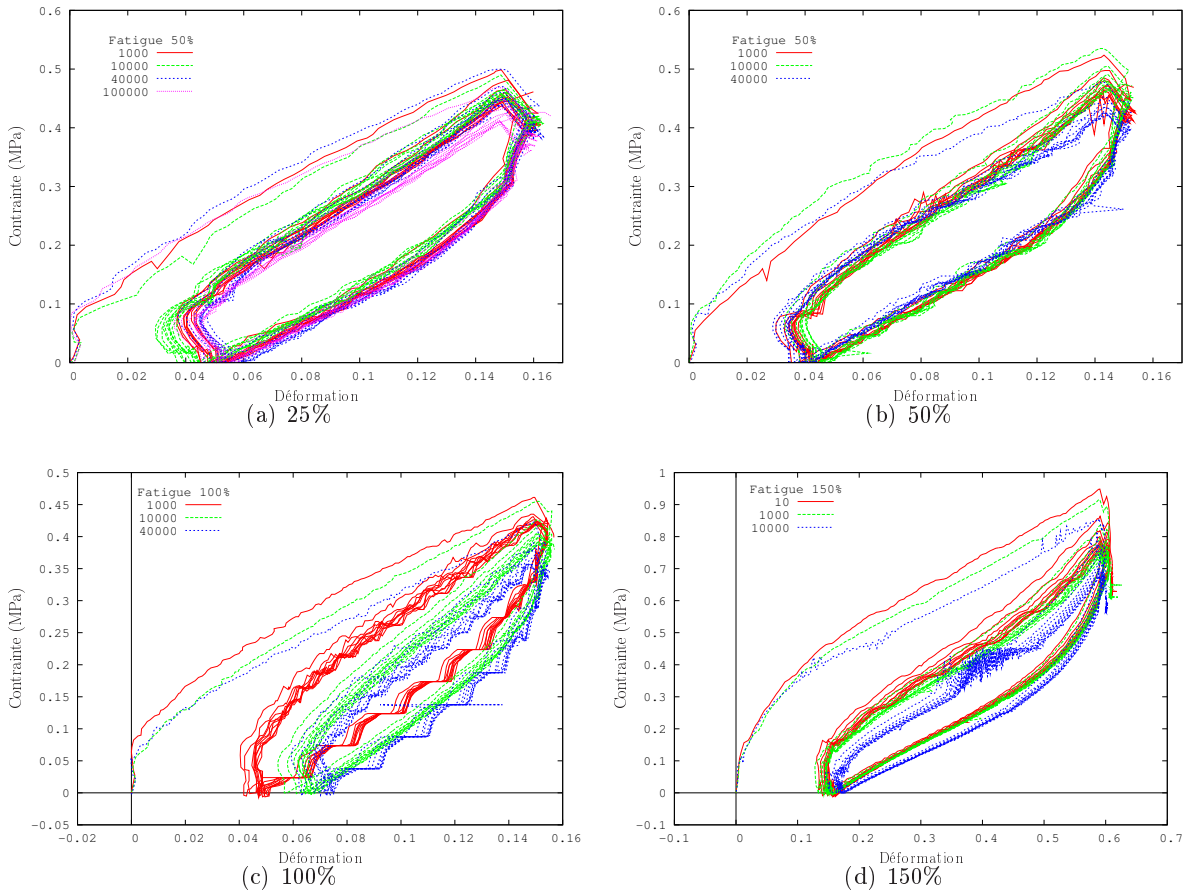


FIGURE III.14 – Réponses aux essais cycliques, en traction, pour les différentes configurations de fatigue

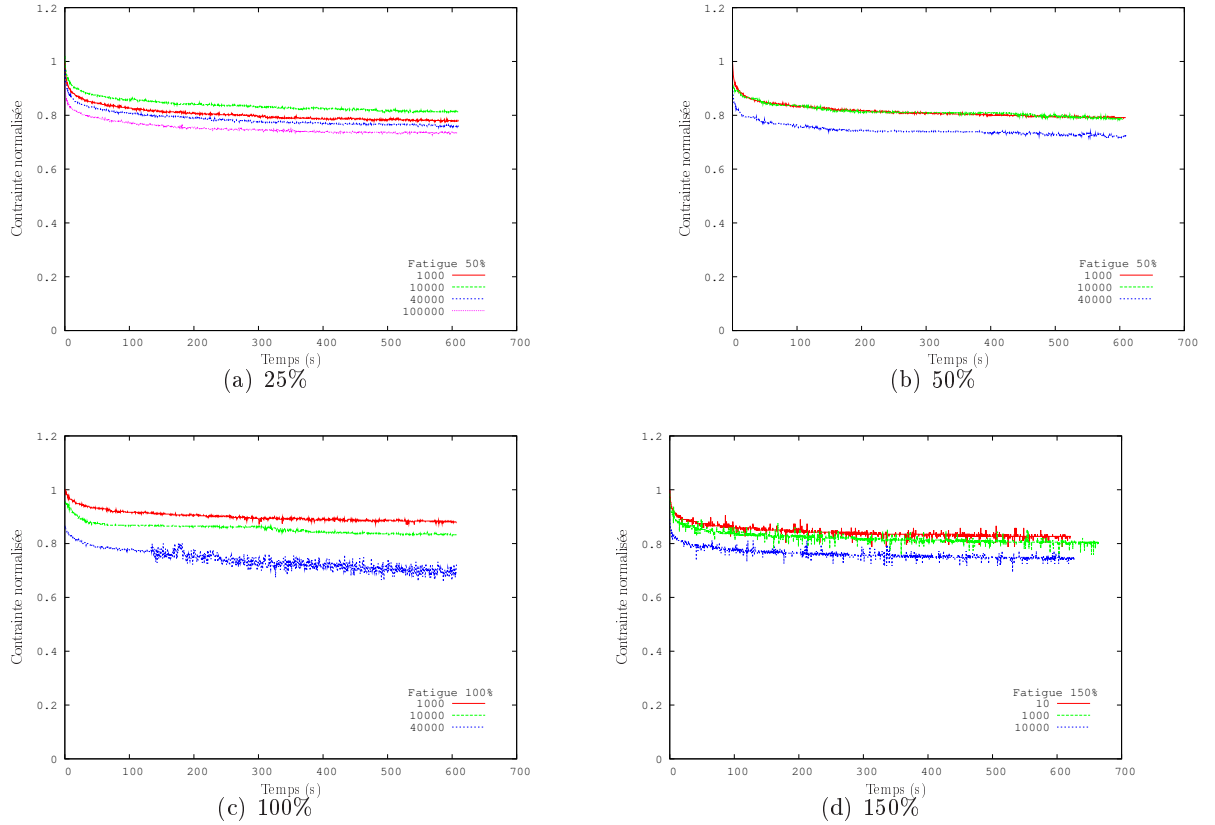


FIGURE III.15 – Réponses aux essais de relaxation, en traction, pour les différentes configurations de fatigue

Une étude plus fine des courbes de la FIGURE III.15 permet de mettre en évidence l'influence de la fatigue sur les grandeurs caractéristiques de relaxation. La réponse instantanée σ_0 , la réponse différée σ_{inf} et le temps de retard à la relaxation $\dot{\sigma}_0$ décroissent avec le nombre de cycle.

Ainsi, nous avons mis en évidence dans cette campagne expérimentale de traction :

- L'influence de la fatigue sur le comportement de l'élastomère chargé pour différentes configurations de fatigue. Les essais de caractérisation réalisés feront l'objet d'une base expérimentale pour la caractérisation des paramètres d'un modèle de comportement en fatigue.
- Mais aussi, les difficultés engendrées par l'utilisation d'éprouvettes H2 pour des études de fatigue, essentiellement liées à l'apparition de déformations résiduelles élevées.

III.2.3 Campagne expérimentale en cisaillement

La campagne de cisaillement menée regroupe deux types d'essais. Dans un premier temps, nous avons fatigué les éprouvettes en leur faisant subir différents nombres de cycles pour différentes configurations. Ensuite, dans le but de caractériser cet endommagement par fatigue et afin d'identifier les paramètres du modèle développé plus loin, divers essais caractéristiques sont réalisés sur ces éprouvettes préalablement fatiguées.

III.2.3.a Fatigue des éprouvettes

Cette première étape a pour but d'endommager des éprouvettes à différents niveaux de fatigue. Nous faisons ainsi subir aux éprouvettes des essais cycliques à **diverses configurations** :

- Amplitudes statiques (ou pré-déformations) : 0 et 12.5%
- Amplitudes dynamiques : 12,5%, 25% et 50%
- Fréquences : 6Hz et 15Hz

et à **différentes étapes de fatigue**, c'est-à-dire pour différents nombres de cycles : 1000, 30000, 70000, 100000, 150000, 200000, 300000 ...

Tous les essais sont réalisés dans l'enceinte adiabatique fixée à 25°C.

Les résultats que nous avons obtenus à partir de ces essais de fatigue dépendent fortement de la configuration d'essais :

- les essais à 12,5% d'amplitude dynamique, à 6Hz et 15Hz, ne présentent pas d'endommagement même après 1 million de cycles mais on observe une légère rigidification du comportement *cf.* FIGURE III.16,

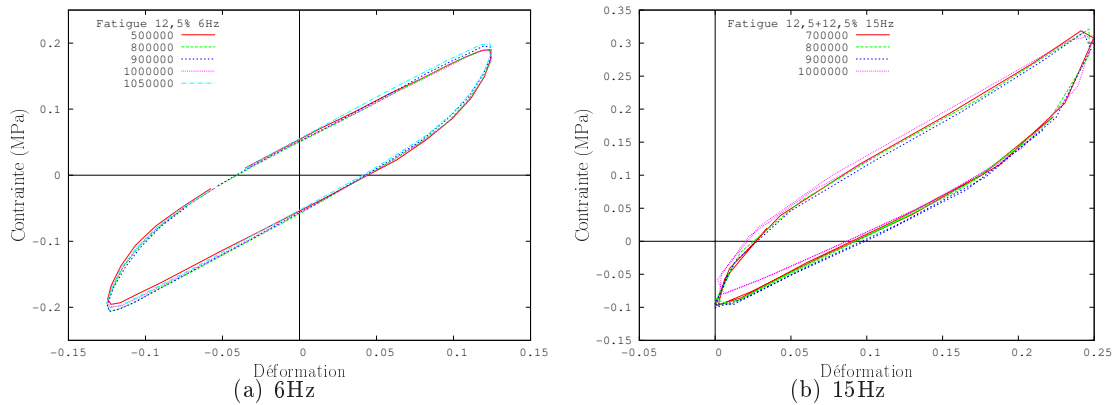


FIGURE III.16 – *Courbes de fatigue, en cisaillement, à 12,5% d'amplitude dynamique (avec et sans pré-déformation) à 6Hz et 15Hz.*

- les essais cycliques à 25% d'amplitude dynamique, avec ou sans pré-déformation, présentent pour les deux fréquences une rigidification suivie d'un adoucissement du comportement global, *cf.* FIGURE III.17,
- enfin, les essais à 50% de déformation ont mis en évidence un endommagement du matériau mais de façon trop brutale pour poursuivre l'étude du comportement *cf.* FIGURE III.18.

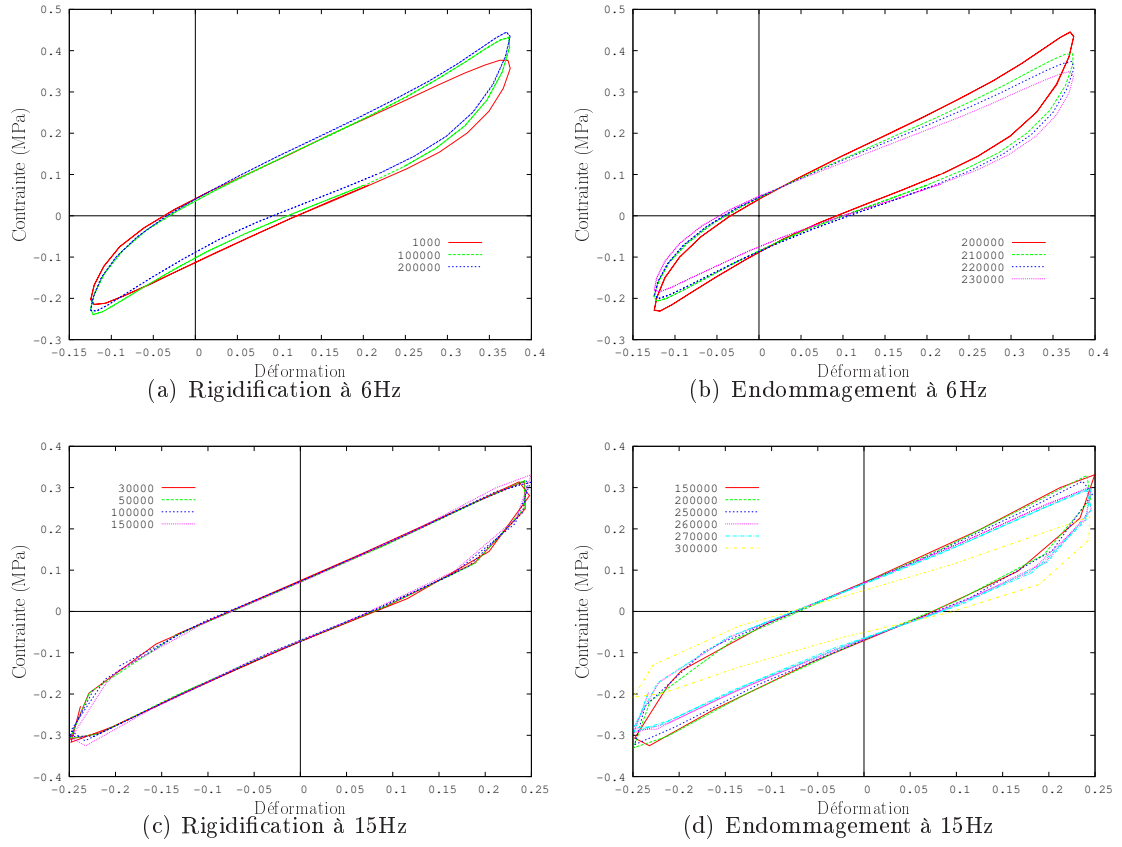


FIGURE III.17 – Courbes de fatigue, en cisaillement, à 25% d'amplitude dynamique (avec et sans pré-déformation) à 6Hz et 15Hz.

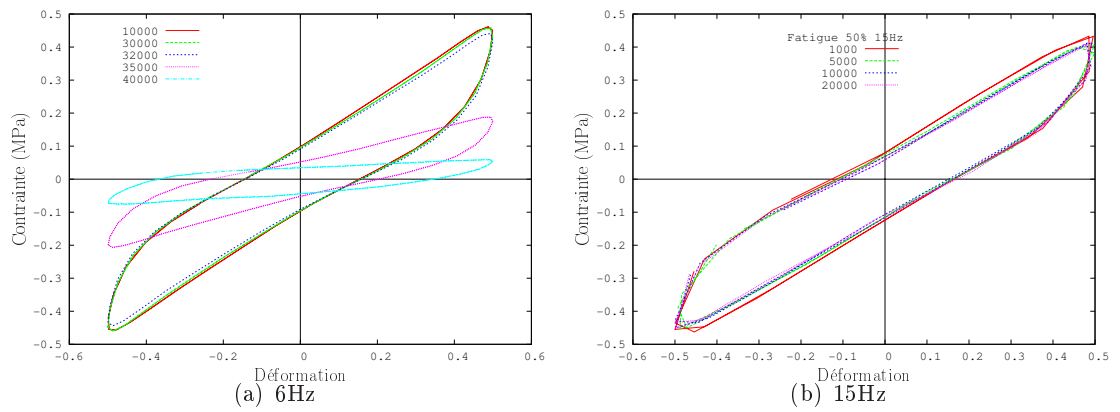


FIGURE III.18 – Courbes de fatigue, en cisaillement, à 50% d'amplitude dynamique à 6Hz et 15Hz

Sur ces éprouvettes endommagées, nous avons réalisé de simples clichés macroscopiques du ménisque. Ces observations ont permis de mettre en évidence deux types d'endommagement :

- une propagation de fissure, observée dans le cas d'éprouvettes endommagées mais non ruinées (configuration de fatigue à 25% et 12,5 + 25%) sur les FIGURE III.19, et sur les éprouvettes sollicitées jusqu'au décollement élastomère/armature : FIGURE III.20(a) et III.20(b).
- un arrachement du matériau qui semble apparaître en présence de gros défauts.

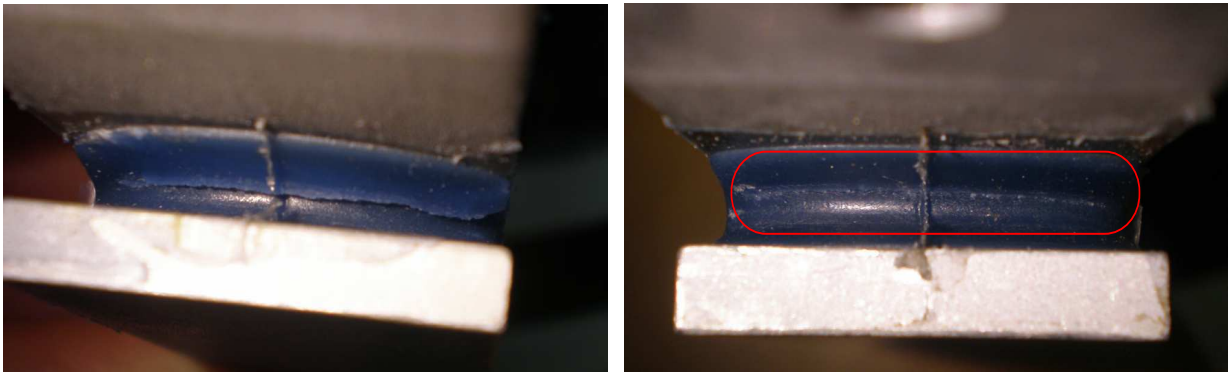


FIGURE III.19 – *Fissures en fond de ménisque sur éprouvettes fatiguées non décollées*

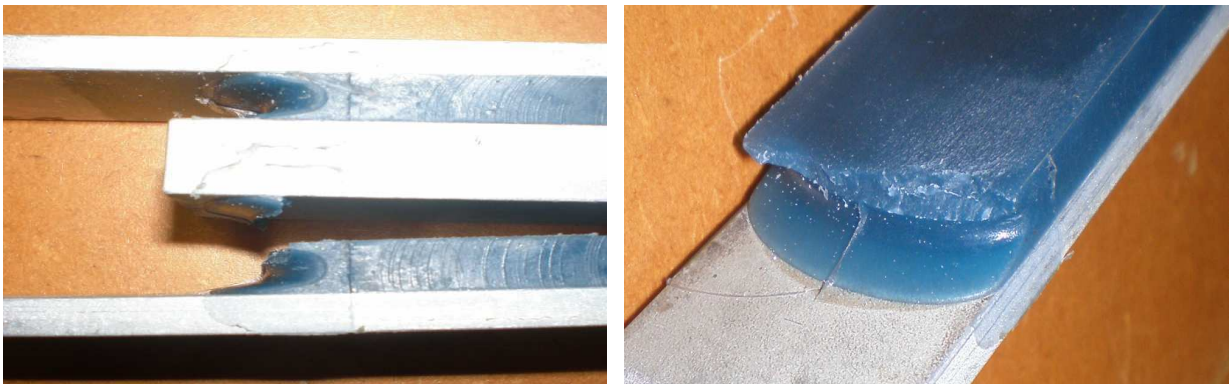


FIGURE III.20 – *Fissures en fond de ménisque sur éprouvettes fatiguées jusqu'au décollement*

À la vue de ces clichés, deux remarques sur la localisation de l'endommagement sont apportées :

- les fissures se propagent obliquement du centre du ménisque vers l'armature centrale
- l'endommagement apparaît, dans 80% des cas, du même côté de l'éprouvette (côté où l'armature centrale est la plus longue) cf. FIGURE III.21

Nous sommes amenés à penser qu'une partie de cette la localisation de l'endommagement est induite par le montage expérimental. Nous présentons, sur la FIGURE III.21, un schéma du montage qui met en avant la présence de concentrations de contraintes supplémentaires au niveau de l'armature centrale.

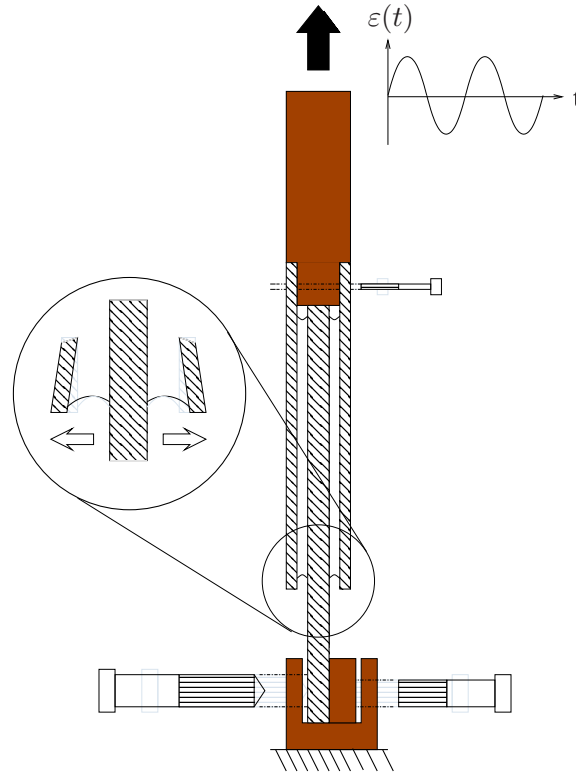


FIGURE III.21 – Montage expérimental pour les éprouvettes de cisaillement

Un relevé de la température au bord d'une éprouvette (réalisé à l'aide d'un thermocouple fixé sur la surface), lors d'un essai de fatigue à amplitude dynamique de 50% sans pré-déformation à 15Hz, présente un pic de température allant jusqu'à 38°C , avant une stabilisation autour de 28°C . Ces résultats sont présentés sur la FIGURE III.22(a). La FIGURE III.22(b) présente l'évolution de la température à cœur, au cours du même essai réalisé sans enceinte. En comparant ces deux courbes, on constate que l'utilisation de l'enceinte adiabatique va permettre de réguler l'auto-échauffement de l'éprouvette mais après un certain temps.

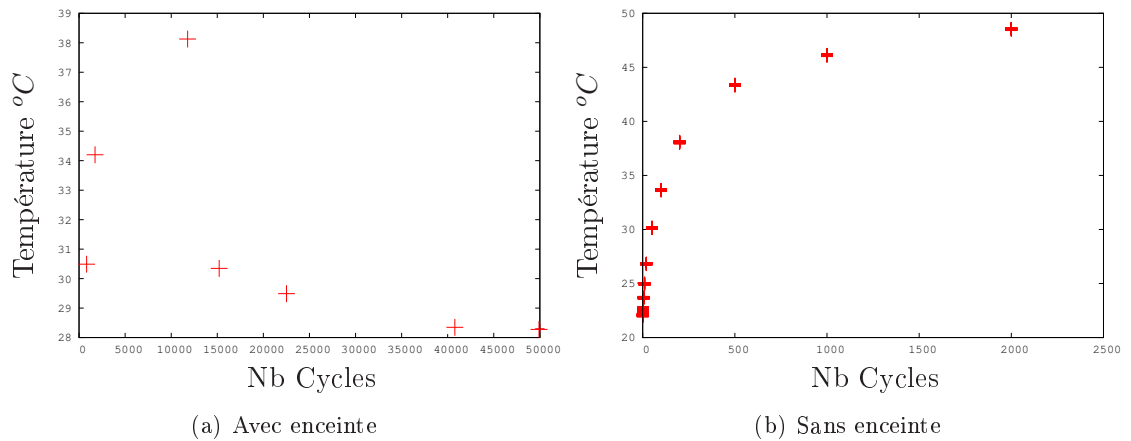


FIGURE III.22 – Evolution de la température durant 50000 cycles

Quelqu'en soient les causes, cette variation de température lors des essais de fatigue prouve la nécessité de caractériser le matériau après refroidissement des éprouvettes et sur des essais à faible nombre de cycles.

Ainsi pour permettre ce refroidissement de manière non brutale, après chaque étape de fatigue, les éprouvettes reposent deux à trois jours à température ambiante avant d'être soumises à un pannel d'essais que nous appelons "essais de caractérisation". Ce repos nous permet de réaliser ces essais sur un matériau stabilisé et dont la température à coeur est d'environ 25°C .

III.2.3.b Essais de caractérisation

Après chaque étape de fatigue, et une fois le repos de deux à trois journées réalisé, les éprouvettes fatiguées sont soumises à cinq essais caractéristiques :

- 3 essais triangulaires à amplitudes progressives, à différentes vitesses de sollicitation (0.1s^{-1} , 1s^{-1} et 10s^{-1}) FIGURE. III.23 (a),
- 1 essai de charge/décharge quasi-statique à amplitudes progressives, FIGURE. III.23. (b)
- 1 essai de relaxation à amplitudes progressives, FIGURE. III.23 (c),

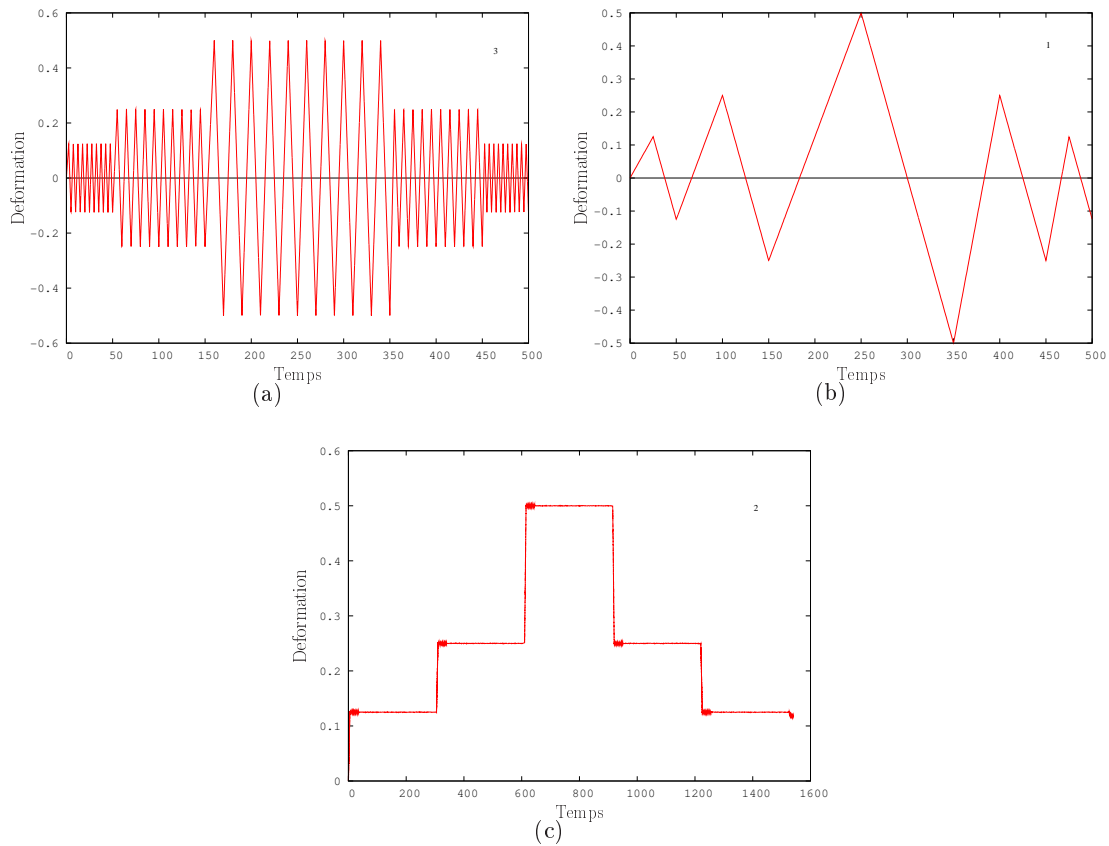


FIGURE III.23 – Les trois types d'essais de caractérisation

C'est à partir des réponses aux essais caractéristiques que nous réalisons à la fois les analyses expérimentales présentées dans la partie suivante, et les identifications des paramètres des modèles de comportement développés dans cette étude et exposés dans le chapitre IV.

Les réponses que nous obtenons font ressortir les même phénomènes que les courbes de fatigue mais de façon plus nette. Nous présentons, sur la FIGURE III.24, les réponses aux cinq essais caractéristiques pour différents nombres de cycles de la configuration à 15Hz, sans prédéformation à 25% d'amplitude dynamique. Ces courbes mettent en évidence deux phénomènes liés à l'endommagement : l'assouplissement global du matériau ainsi qu'une diminution de la dissipation. Toutes les courbes obtenues sont présentées en ANNEXE C.

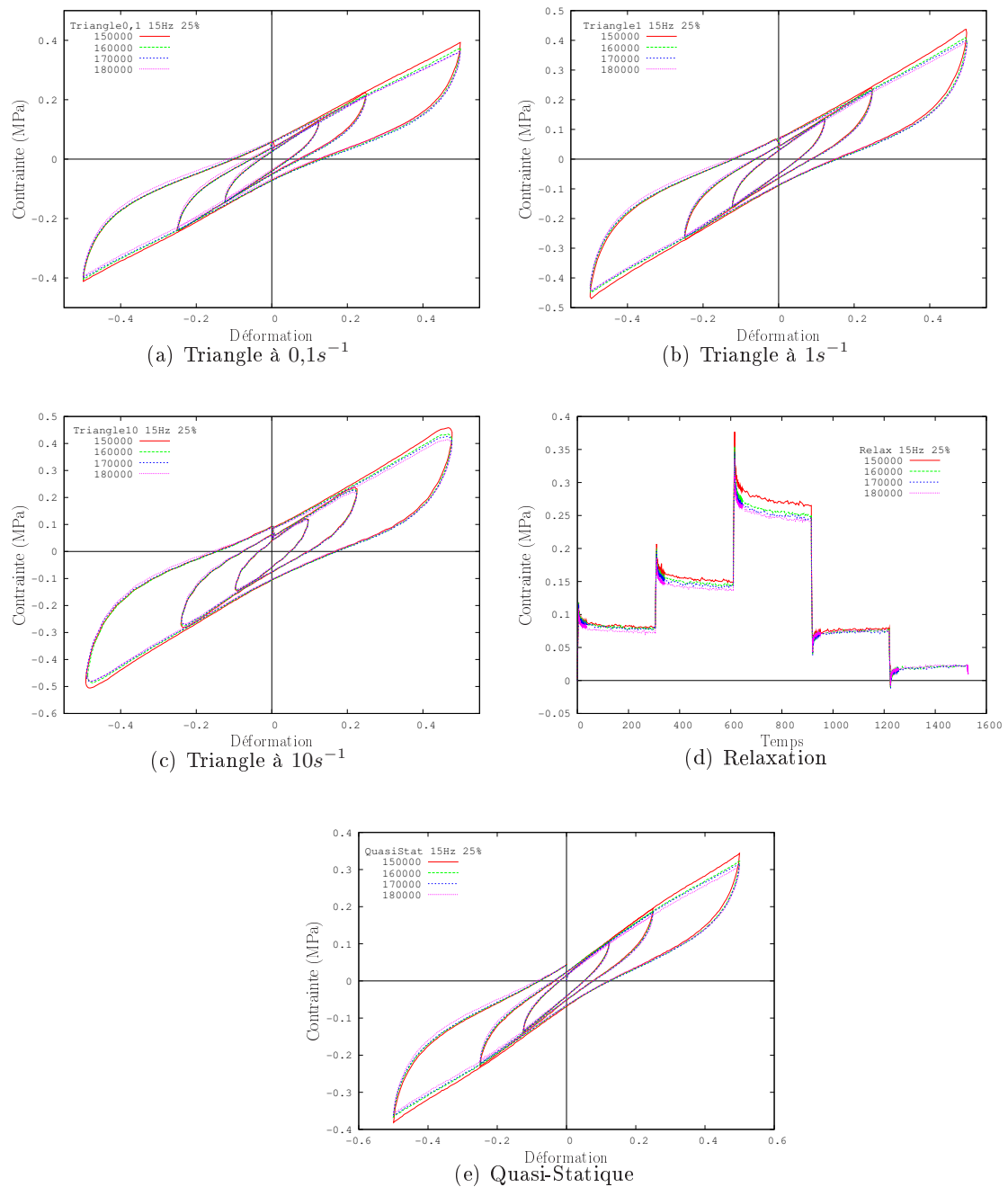


FIGURE III.24 – Evolution des essais de caractérisation, en cisaillement, fatigués à 15Hz à $\pm 25\%$

III.3 Analyse des résultats expérimentaux

III.3.1 Remarque générale

À la vue des résultats expérimentaux présentés ci-dessus, nos premières remarques portent sur le choix des éprouvettes et du matériau.

La campagne en traction met en avant les difficultés expérimentales qui subviennent lors d'essais sur éprouvettes en élastomère de type HALTÈRE, spécialement dûes à l'apparition de grandes déformations résiduelles dont il faut absolument tenir compte pour caractériser un comportement.

De plus, l'utilisation d'élastomères à matrice silicone, matériaux à faible propriété d'adhésion, sous forme d'éprouvettes de double cisaillement (dont les couches d'élastomères sont en contact avec 2 armatures en aluminium) ne semble pas la plus pertinente pour l'étude du comportement en **fatigue**. La caractérisation de la fatigue en cisaillement n'est donc pas réellement basée sur un comportement homogène dans l'éprouvette. Elle tend, dans les cas extrêmes et à partir d'un certain nombre de cycles, vers la caractérisation du comportement des interfaces élastomères/armatures.

Cette dernière remarque permet ainsi de justifier la rapidité de la décohésion au niveau des interfaces et de la propagation de fissures, dans le cas des configurations les plus sévères (configurations à amplitude dynamique de 50%) pour lesquelles les interfaces sont fortement sollicitées. Nous présentons sur la figure FIGURE III.25, certains cycles de fatigue à amplitude statique de 50% sans pré-déformation réalisés à 6Hz. Nous constatons sur ces essais trois phénomènes :

- d'abord un comportement stable sans endommagement entre 10000 et 30000 cycles,
- un endommagement que nous qualifions de global qui apparaît entre 30000 et 32000 cycles,
- et enfin une chute brutale du comportement qui émane d'un fort endommagement de l'interface avant rupture de celle-ci.

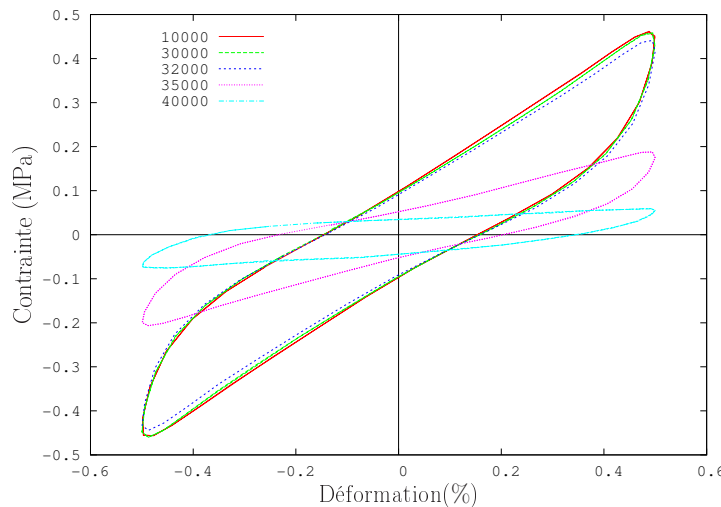


FIGURE III.25 – Evolution du comportement en cisaillement lors des essais fatigue à 50%, 6Hz.

Avant toute analyse de ces résultats, il faut noter l'importance du couplage qui intervient lors de ces essais à grandes déformations, entre les effets d'endommagement et les effets thermiques. Celui-ci ne permet pas une caractérisation des phénomènes propres à l'endommagement puisque les effets thermiques influencent à la fois le comportement du matériau mais aussi les propriétés d'interface entre élastomère et armature. Ainsi, dans le but de ne pas coupler un trop grand nombre de phénomènes, nous n'allons pas plus loin dans l'étude de l'influence de la fatigue à amplitude dynamique de 50% sur les éprouvettes de double cisaillement.

III.3.2 Evolution des essais caractéristiques de cisaillement

III.3.2.a Configuration de fatigue à amplitude dynamique de 12,5%

Tous les essais que nous avons réalisés à amplitude dynamique de 12,5% ont permis de mettre en évidence uniquement le phénomène de rigidification du comportement. Nous présentons les réponses obtenues sur les FIGURE III.26 et FIGURE III.27.

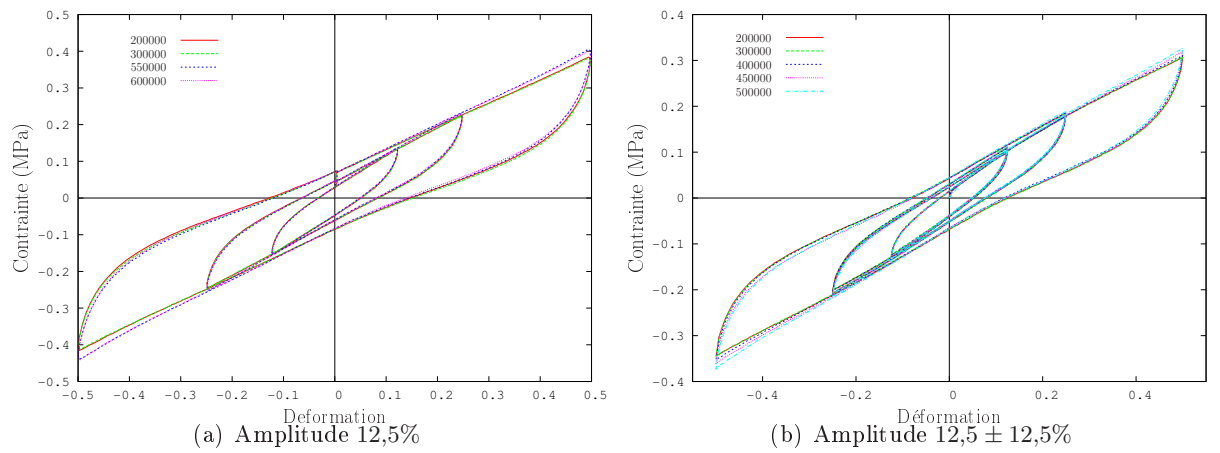


FIGURE III.26 – Réponses de la configuration de cisaillement, fatiguée à 6Hz.

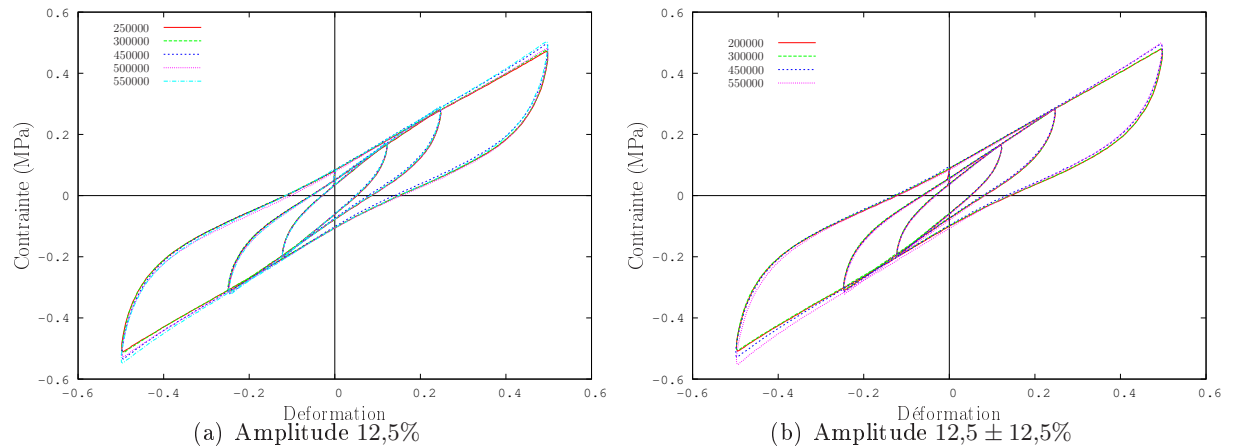


FIGURE III.27 – Réponses de configuration de cisaillement fatiguée à 15Hz.

L'endommagement subi par les éprouvettes pour les configurations à 12,5% d'amplitude dynamique ne paraît pas assez conséquent pour être visible sur le comportement global. Une déformation dynamique de 12,5% semble alors faiblement endommageante pour ces matériaux. Ces résultats permettent néanmoins de fournir un seuil d'utilisation, en terme de nombre de cycles, en-dessous duquel le matériau n'est pas endommagé.

III.3.2.b Configuration de fatigue à amplitude dynamique de 25%

• Essais à 15Hz

Les essais de fatigue réalisés à amplitude dynamique de 25% avec et sans pré-déformation à 15Hz présentent deux phénomènes :

- une rigidification globale du matériau (FIGURE III.28(a) et FIGURE III.29(a)),
- puis à partir d'un certain nombre de cycles, un assouplissement de la réponse globale de l'éprouvette (FIGURE III.28(b) et FIGURE III.29(b)).

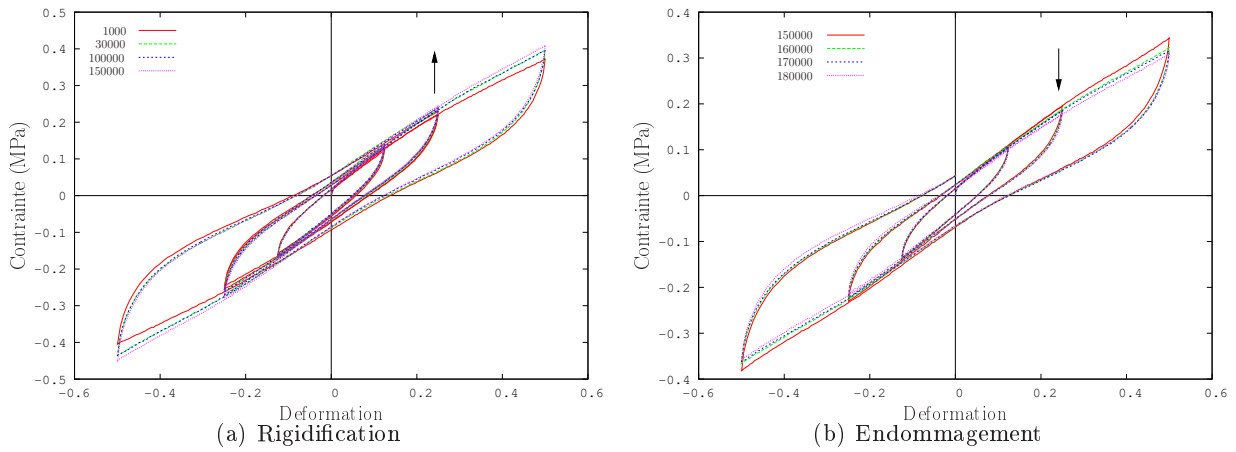


FIGURE III.28 – Réponses de la configuration de cisaillement fatiguée à 15Hz et à $\pm 25\%$

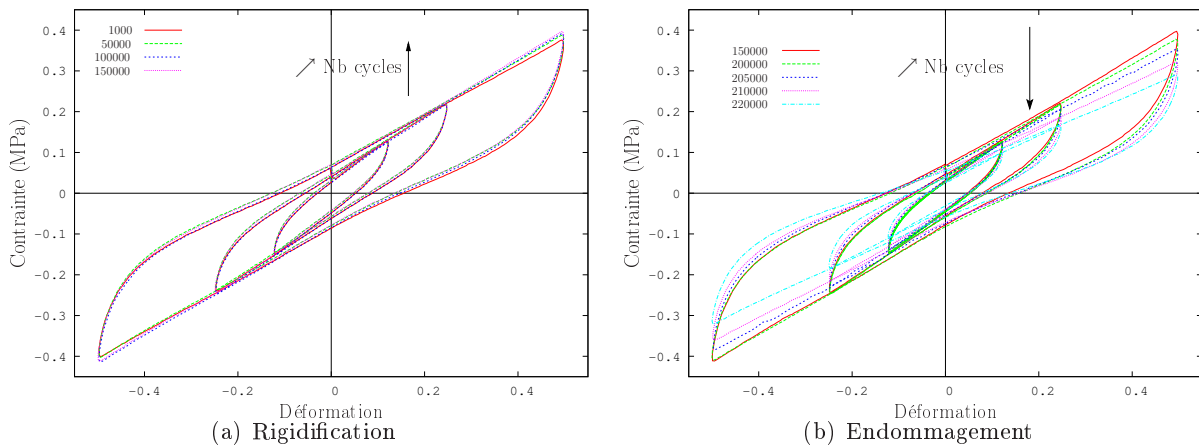


FIGURE III.29 – Réponses de la configuration de cisaillement, fatiguée à 15Hz et à $12,5 \pm 25\%$

- Essais à 6Hz

Les courbes que nous obtenons pour les configurations de fatigue à 6Hz mettent en avant les mêmes phénomènes que les configurations à 15Hz, soit une rigidification, que l'on présente sur les FIGURE III.30(a) et FIGURE III.31(a), suivie d'un assouplissement du comportement : FIGURE III.30(a) et FIGURE III.31(b).

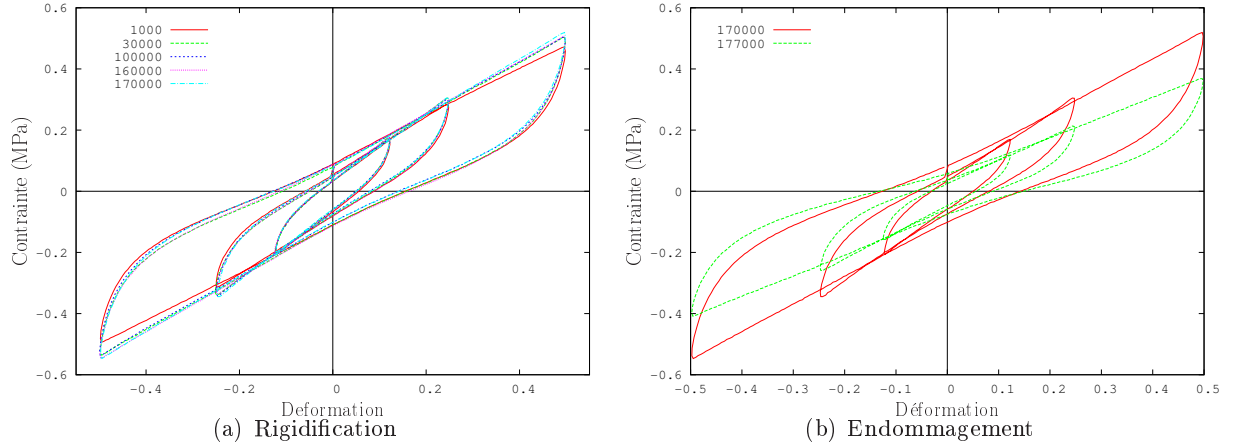


FIGURE III.30 – Réponses de la configuration de cisaillement, fatiguée à 6Hz à $\pm 25\%$

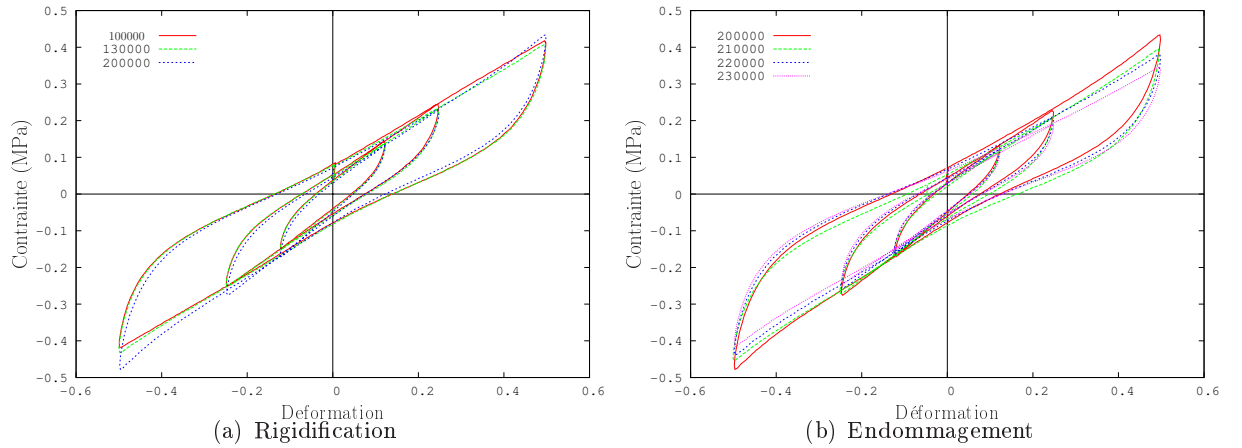


FIGURE III.31 – Réponses de la configuration de cisaillement, fatiguée à 6Hz et à $12,5 \pm 25\%$

Le phénomène de rigidification, que nous retrouvons aussi en traction, peut être lié à un phénomène de vieillissement thermique. Le relevé de températures sur l'éprouvette que nous présentons sur la FIGURE III.22(a) montre une augmentation importante de la température en surface, laissant supposer un échauffement largement plus important à coeur. Selon certains auteurs tels que PARK *et al.* [2000] et DELORS-JUSTIN *et al.* [1999], ce vieillissement thermique peut agir parallèlement à un mécanisme d'oxydation. Une compétition entre ces deux phénomènes entraîne alors une augmentation de la réticulation, ainsi qu'une rigidification globale du matériau.

On suppose alors que cet effet de vieillissement thermique se combine à l'effet d'endommagement par fatigue. Au début des essais de fatigue, il semble que ce soit le vieillissement qui régit le comportement global du matériau. À partir d'un certain niveau d'endommagement, la balance s'inverse et l'endommagement devient visible au niveau du comportement global. L'étude que nous menons traitant essentiellement d'endommagement, nous laissons de côté, pour le moment, l'étude de la rigidification.

III.4 Conclusion

En résumé, nous avons réalisé deux campagnes expérimentales de fatigue : une en traction, l'autre en cisaillement. Ces deux campagnes ont suivi la même méthodologie en trois étapes :

- D'abord, des essais de fatigue cyclique à différents niveaux de fatigue, pour diverses configurations d'essais (différentes fréquences et amplitudes de déformations)
- Chaque éprouvette a ensuite reposé, à température ambiante quelques jours. L'objectif de cette étape étant de pouvoir caractériser le comportement sur des éprouvettes stabilisées,
- Et enfin, pour chaque configuration d'essais et pour chaque niveau de fatigue, les éprouvettes ont subi des essais de caractérisation.

L'analyse des résultats expérimentaux endommagés, en traction et en cisaillement, a permis de relever les deux phénomènes traduisant l'endommagement par fatigue de ces élastomères :

- une décroissance de la raideur globale, Υ (définie au § III.1.2), caractéristique de l'élasticité que l'on retrouve sur la FIGURE III.32,
- une décroissance de l'énergie non libérée par cycle, Φ_{cycle} (définie de même au § III.1.2), caractéristique de l'amortissement d'un système, présentée FIGURE III.32.

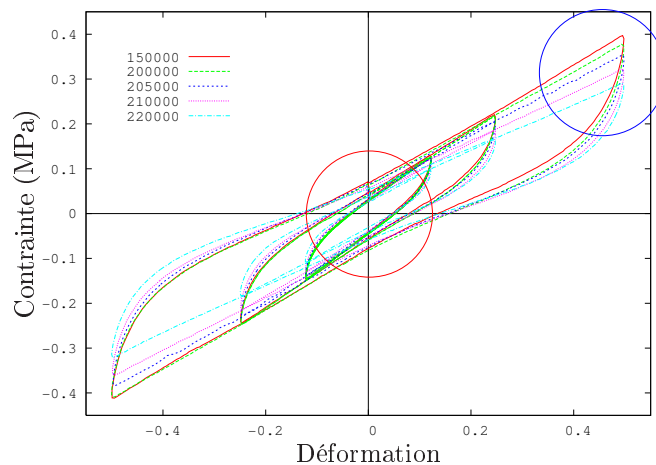


FIGURE III.32 – Evolution du comportement avec le nombre de cycles (essais de fatigue à 15Hz à $12,5 \pm 25\%$)

De telles évolutions sont obtenues pour chaque essai de caractérisation, l'ensemble des résultats est présenté en ANNEXE C.

Une visualisation plus claire de l'évolution de la raideur et de la dissipation est présentée en fonction du nombre de cycles sur les courbes des FIGURES III.33, III.34, III.35, III.36 et III.37, pour les essais de traction et de cisaillement. En ce qui concerne le cisaillement, l'essai caractéristique sur lequel est réalisé cette étude est l'essai quasi-statique de charge-décharge. La croissance puis la décroissance des grandeurs globales est clairement observée.

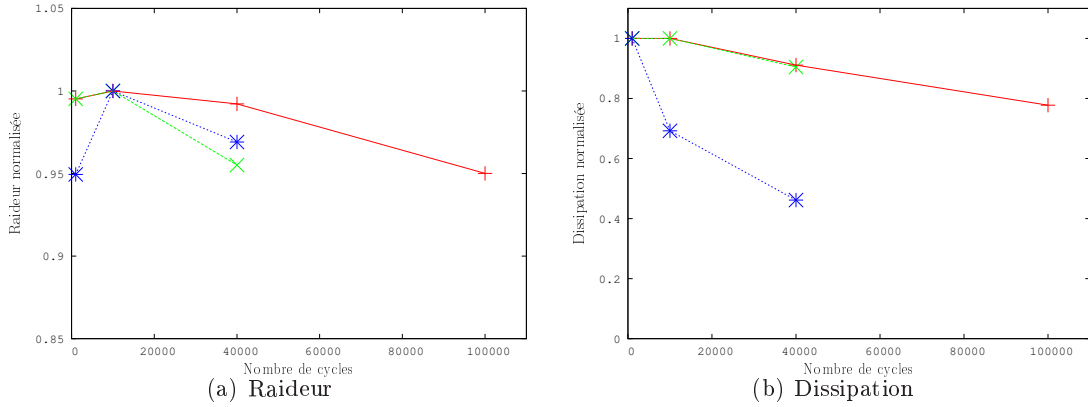


FIGURE III.33 – Evolution des grandeurs caractéristiques pour les essais fatigués en traction (+ : Fatigue à 10%, x : Fatigue à 15% et * : Fatigue à 30%)

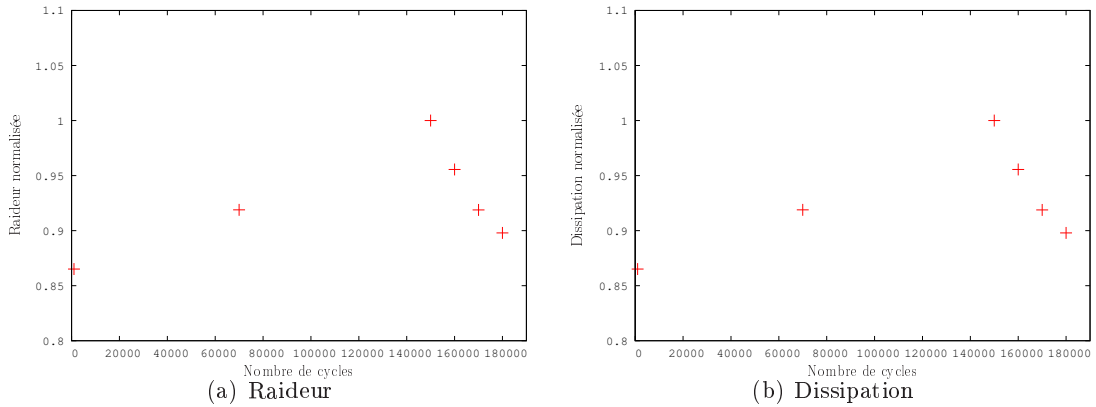


FIGURE III.34 – Evolution des grandeurs caractéristiques, cas des essais fatigués en cisaillement à $\pm 25\%$, à 15Hz

Une exploitation directe de ces courbes par regression linéaire nous permet d'estimer une durée vie limite N_{ultime} , à partir de laquelle le matériau est endommagé. Ce N_{ultime} est calculé comme le nombre de cycles à l'intersection des deux droites obtenue par regression linéaire, la première liée au phénomène de rigidification et la seconde liée à l'assouplissement. Nous présentons cette exploitation sur la FIGURE III.38, les autres courbes sont toutes présentées en D. Cette démarche a été appliquée pour chaque configuration, nous trouvons alors :

- pour l'essai fatigué à 15Hz à $12,5 \pm 25\%$, $N_{\text{ultime}} \simeq 191000\text{cycles}$,
- pour l'essai fatigué à 15Hz à $\pm 25\%$, $N_{\text{ultime}} \simeq 148000\text{cycles}$,
- pour l'essai fatigué à 6Hz à $12,5 \pm 25\%$, $N_{\text{ultime}} \simeq 190000\text{cycles}$,
- pour l'essai fatigué à 6Hz à $\pm 25\%$, $N_{\text{ultime}} \simeq 168000\text{cycles}$,

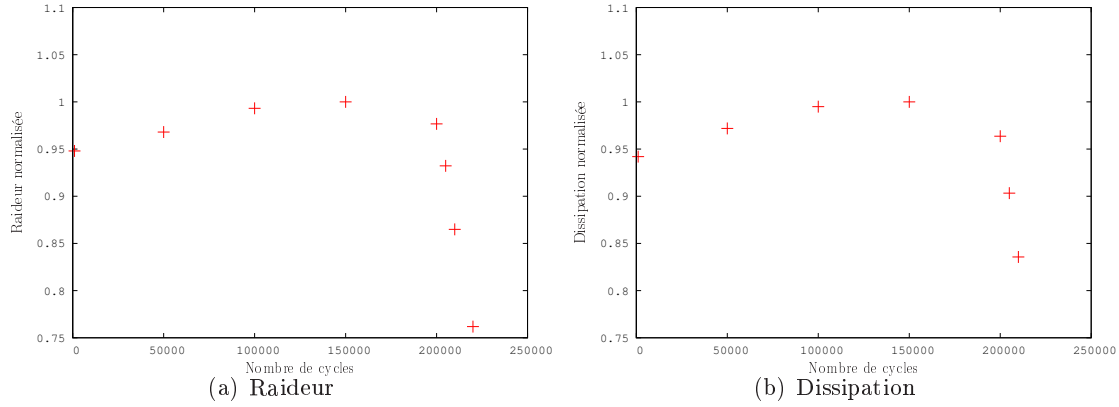


FIGURE III.35 – *Evolution des grandeurs caractéristiques, cas des essais fatigués en cisaillement à $12,5 \pm 25\%$, à 15Hz*

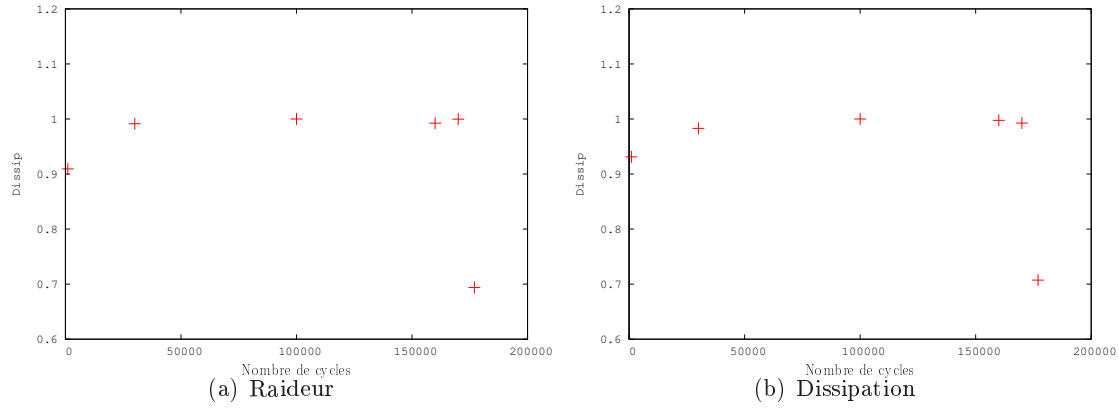


FIGURE III.36 – *Evolution des grandeurs caractéristiques, cas des essais fatigués en cisaillement à $\pm 25\%$, à 6Hz*

Ainsi, cette campagne expérimentale fournit une large bibliothèque d'essais qui mettent en évidence :

- l'influence de la fatigue sur le comportement des élastomères chargés,
- mais aussi l'influence des configurations d'essais (fréquences, amplitudes dynamiques et statiques) sur l'évolution de la fatigue.

Elle permet de distinguer deux mécanismes dûs à la fatigue cyclique qui sont une première rigidification du comportement, certainement liée à un vieillissement thermique, suivie d'un assouplissement global du comportement que l'on qualifie ici d'endommagement pur. Cet endommagement, que nous tentons dans la suite de modéliser, se caractérise au niveau des courbes expérimentales par une diminution de la raideur ainsi qu'une évolution décroissante de la dissipation.

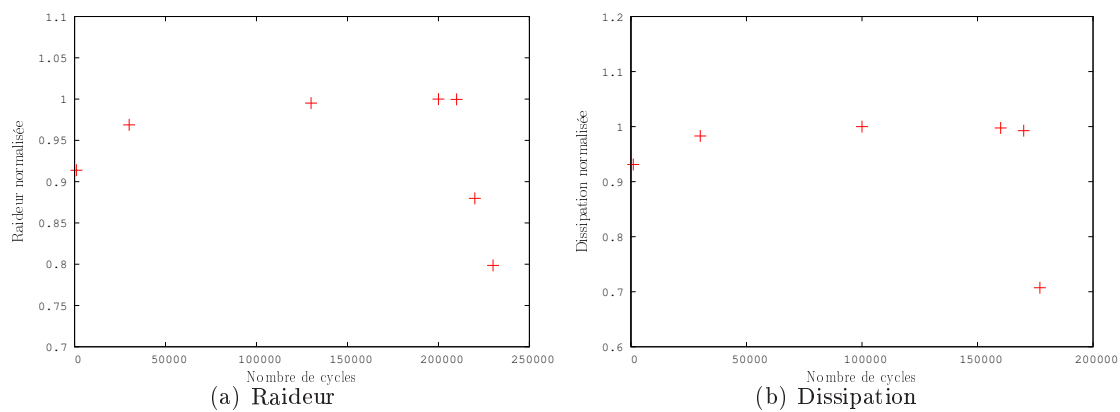


FIGURE III.37 – Evolution des grandeurs caractéristiques, cas des essais fatigués en cisaillement à $12,5 \pm 25\%$, à 6Hz

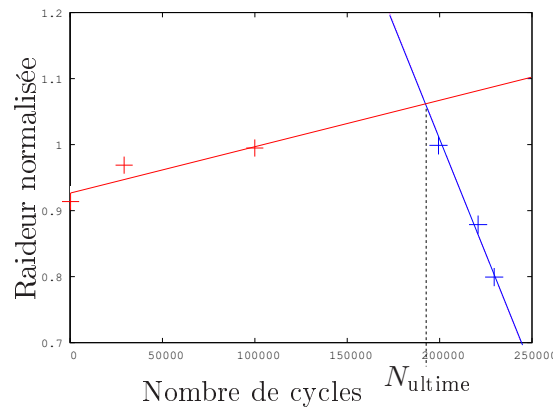


FIGURE III.38 – Mise en évidence d’une durée de vie limite N_{ultime}

Il faut cependant garder en mémoire les difficultés que présente la réalisation d’une campagne de fatigue cyclique sur des éprouvettes de double cisaillement d’un élastomère silicone, à faibles propriétés d’adhésion, à des très larges déformations de l’ordre de 50%. Nous récapitulons dans le tableau ci-dessus les durées de vie limite N_{ultime} pour toutes les configurations testées quand celles-ci ont pu être déterminées.

| | Sans Pré-déformation | | | Avec Pré-déformation | | |
|------|----------------------|--------|-------|----------------------|--------|---------------|
| | 12,5% | 25% | 50% | 12,5% | 25% | 50% |
| 6Hz | > 1000000 | 168000 | 30000 | > 1000000 | 190000 | [30000,50000] |
| 15Hz | > 1000000 | 148000 | 30000 | > 1000000 | 191000 | [30000,50000] |

TABEAU III.3 – Durées de vie limites pour les configurations d’essais fatigués en cisaillement

CHAPITRE IV

Modèles de comportement d'un élastomère chargé

————— oOo —————

Pour traduire la complexité du comportement des élastomères chargés (hyper-élasticité, plasticité, viscosité), et spécialement leur comportement sous sollicitations multi-fréquentielles, des modèles statistiques basés sur des modèles généralisés ont été développés (MEO [2000], MARTINEZ [2005], BOUTKAMEL [2006]). Nous présentons l'évolution de ces modèles, purement phénoménologiques, dans une première partie.

En partant d'observations microscopiques d'un élastomère chargé, qui mettent en évidence la présence de trois phases distinctes jouant, chacune, un rôle dans l'évolution du comportement, nous tentons de traduire cette microstructure par le biais des modèles statistiques. Ces modèles physiquement motivés permettent de décrire plus finement le comportement des matériaux chargés, mais aussi de donner un sens physique aux modèles rhéologiques.

Des hypothèses sur les comportements des trois différentes phases et sur les micro-mécanismes d'interaction ont permis le développement de deux modèles de comportement que nous présentons ici. Dans un premier cas, on suppose que le comportement dissipatif est uniquement situé au niveau des charges et de leur interface. Le deuxième modèle, nécessitant plus de paramètres, assigne à la matrice un comportement visqueux.

————— oOo —————

PLAN DU CHAPITRE IV

| | |
|--|------------|
| IV.1 Des modèles de comportement élasto-dissipatif en grandes transformations | 99 |
| IV.1.1 Des modèles de comportement généralisés... | 99 |
| IV.1.2 ...Aux modèles de comportement statistiques | 102 |
| IV.1.2.a Modèles discrets | 102 |
| IV.1.2.b Modèles statistiques | 103 |
| IV.2 Construction de modèles physiquement motivés | 105 |
| IV.2.1 Observations microscopiques | 105 |
| IV.2.2 Hypothèses originelles du modèle | 106 |
| IV.2.3 Analyse des modèles unitaires | 108 |
| IV.2.4 Description des modèles statistiques | 111 |
| IV.3 Deux modèles de comportement non endommagés | 112 |
| IV.3.1 Le Modèle SHVP1 | 112 |
| IV.3.1.a Equations constitutives du modèle SHVP1 | 112 |
| IV.3.1.b Choix des énergies, des potentiels et des fonctions statistiques | 113 |
| IV.3.1.c Identification et resultats en traction | 115 |
| IV.3.1.d Identification, résultats et validation du modèle SHVP1 | 115 |
| IV.3.2 Le modèle SHVP1_PT | 118 |
| IV.3.2.a Equations constitutives du modèle SHVP1_PT | 118 |
| IV.3.2.b Choix des énergies, des potentiels et des fonctions statistiques | 119 |
| IV.3.2.c Identification, résultats et validation du modèle SHVP_PT | 120 |
| IV.4 Conclusion | 123 |

IV.1 Des modèles de comportement élasto-dissipatif en grandes transformations

Dans toute la suite de ce travail, nous nous plaçons dans le cadre thermodynamique décrit dans la partie I.3.1.

Nous rappelons que les phénomènes thermiques et mécaniques sont découplés. L'inégalité de CLAUSIUS-DUHEIM, telle que nous l'utilisons dans la suite, ne tient compte que de la partie mécanique $\phi^{\text{méca}}$ des dissipations :

$$\phi = \underbrace{\bar{\sigma} : \bar{D} - \rho \dot{\psi}}_{\phi^{\text{méca}}} - \underbrace{\frac{1}{T} \overrightarrow{\text{grad}}_x T \cdot \vec{q}}_{\phi^{\text{ther}}} \geq 0 \quad (\text{IV.1})$$

IV.1.1 Des modèles de comportement généralisés...

À partir du **Principe d'invariance des Fonctions Constitutives** défini par SIDOROFF [1973, 1976], dans les cas isotropes et pour une décomposition de la transformation globale en N configurations intermédiaires, l'énergie libre peut prendre la forme d'une somme de fonctions isotropes des tenseurs \bar{B} et \bar{b}_e^i (élastique) pour $i \in [1..N]$ (cf. FIGURE IV.1) :

$$\psi = \psi_0(\bar{B}) + \psi_e^i(\bar{b}_e^i) \quad (\text{IV.2})$$

où ψ_e^i décrit l'énergie libre liée à la transformation purement élastique de la $i^{\text{ème}}$ configuration.

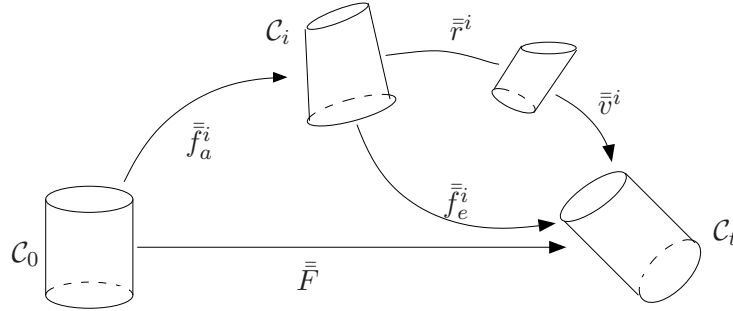


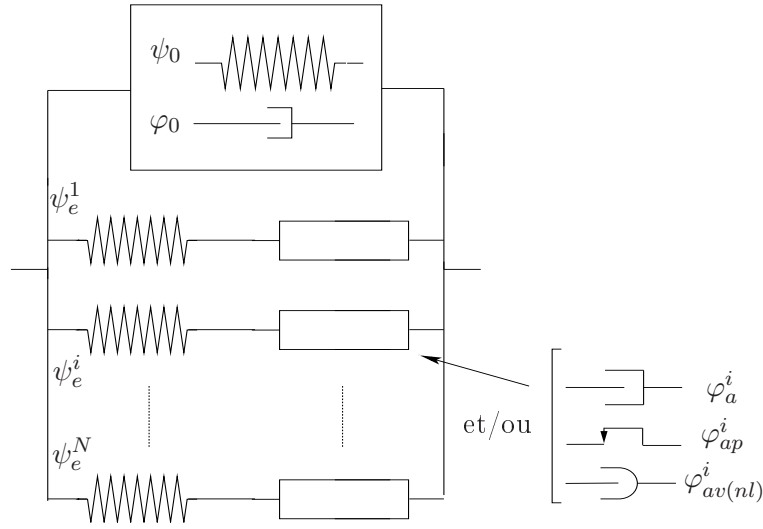
FIGURE IV.1 – Généralisation à un modèle rhéologique étendu composé de N branches

\bar{f}_a^i représente la transformation anélastique (telle que $\bar{F} = \bar{f}_e \cdot \bar{f}_a$) de la branche i .

L'équation IV.2 représente l'énergie libre d'un matériau dont le comportement peut être schématisé par tout modèle rhéologique de la forme de la FIGURE IV.2.

Dans le cas de cette décomposition de l'énergie libre, l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEIM, donnée par l'équation I.7 du § I.3.1, devient une fonction des $N+1$ variables internes (\bar{B}, \bar{b}_e^i) :

$$\phi^{\text{méca}} = \bar{\sigma} : \bar{D} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \bar{B}} : \dot{\bar{B}} - \rho \sum_{i=1}^N \frac{\partial \psi}{\partial \bar{b}_e^i} : \dot{\bar{b}}_e^i \geq 0 \quad (\text{IV.3})$$

FIGURE IV.2 – Généralisation à un modèle rhéologique étendu composé de N branches

On peut montrer (MEO [2000]), dans le cas où l'on suppose une décomposition polaire des $\bar{\bar{f}}_e^i$ sous la forme $\bar{\bar{f}}_e^i = \bar{\bar{v}}^i \bar{\bar{r}}^i$ (cf. FIGURE IV.1), que le taux d'évolution des tenseurs $\bar{\bar{b}}_e^i$ dépend à la fois du taux de déformation globale $\bar{\bar{L}}$ et des tenseurs objectifs ${}^i\bar{\bar{d}}_a^o$ qui définissent les mesures eulériennes du taux de déformations relatives aux transformations anélastiques $\bar{\bar{f}}_a^i$. Les tenseurs ${}^i\bar{\bar{f}}_a^o$ s'obtiennent de $\bar{\bar{d}}_a^i$ par rotation élastique, telle que ${}^i\bar{\bar{d}}_a^o = \bar{\bar{r}}^i \cdot \bar{\bar{f}}_a^i \cdot \bar{\bar{r}}^{iT}$. Après quelques étapes de calculs, $\dot{\bar{\bar{b}}}_e^i$ prend la forme suivante (cf. ANNEXE B pour le détail des opérations) :

$$\dot{\bar{\bar{b}}}_e^i = \bar{\bar{L}} \cdot \bar{\bar{b}}_e^i + \bar{\bar{b}}_e^i \cdot \bar{\bar{L}}^T - 2\bar{\bar{v}}^i \cdot {}^i\bar{\bar{d}}_a^o \cdot \bar{\bar{v}}^i \quad (\text{IV.4})$$

Ainsi, en supposant la décomposition du pseudo-potential de dissipation intrinsèque, telle que $\varphi^{\text{int}}(\bar{\bar{D}}, {}^i\bar{\bar{d}}_a^o) = \varphi^0(\bar{\bar{D}}) + \varphi_a^i({}^i\bar{\bar{d}}_a^o)$, l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEIM peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \phi^{\text{meca}} &= \left(\bar{\bar{\sigma}} - 2\rho\bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}} - 2\rho\bar{\bar{b}}_e^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{b}}_e^i} \right) : \bar{\bar{D}} + 2\rho\bar{\bar{v}}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{b}}_e^i} \cdot \bar{\bar{v}}^i : {}^i\bar{\bar{d}}_a^o \\ &= \frac{\partial\varphi^0}{\partial\bar{\bar{D}}} : \bar{\bar{D}} + \frac{\partial\varphi_a^i}{\partial {}^i\bar{\bar{d}}_a^o} : {}^i\bar{\bar{d}}_a^o \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

Les lois constitutives et les lois complémentaires, en description eulérienne qui découlent du cadre thermodynamique des grandes transformations et des processus irréversibles, sont regroupées dans l'équation IV.6 :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \bar{\bar{\sigma}} &= 2\rho\bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}} + 2\rho\bar{\bar{b}}_e^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{b}}_e^i} + \frac{\partial\varphi^0}{\partial\bar{\bar{D}}} \\ \bullet \quad \frac{\partial\varphi_a^i}{\partial {}^i\bar{\bar{d}}_a^o} &= 2\rho\bar{\bar{v}}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{b}}_e^i} \cdot \bar{\bar{v}}^i \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

La prise en compte de l'incompressibilité pour ces modèles multibranches se fait à partir d'une hypothèse d'équivalence entre l'incompressibilité globale du matériau ($\text{tr} \bar{\bar{D}} = 0$) et l'incompressibilité de chaque configuration intermédiaire, telle que $\text{tr}(\bar{\bar{d}}_e^i) = \text{tr}(\bar{\bar{d}}_a^i) = 0$.

L'isotropie d'un matériau (tel que l'élastomère étudié) permet une description de la fonction d'énergie libre uniquement à partir de ses invariants, de telle sorte que :

$$\psi(\bar{\bar{B}}, \bar{\bar{b}}_e^i) = \psi_0(I_1, I_2, I_3) + \psi_e^i(I_{e1}^i, I_{e2}^i, I_{e3}^i)$$

où I_1, I_2 et I_3 sont les trois invariants de $\bar{\bar{B}}$ et I_{e1}^i, I_{e2}^i et I_{e3}^i les trois invariants de $\bar{\bar{b}}_e^i$.

Ainsi, les équations générales régissant le comportement d'un matériau isotrope incompressible prennent les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \bullet \bar{\bar{\sigma}} &= 2\rho \left[\frac{\partial \psi}{\partial I_1} \bar{\bar{B}} - \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \bar{\bar{B}}^{-1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_{e1}^i} \bar{\bar{b}}_e^i - \frac{\partial \psi}{\partial I_{e2}^i} \bar{\bar{b}}_e^{-i} \right]^D + \left[\frac{\partial \varphi^0}{\partial \bar{\bar{D}}} \right]^D - p \bar{\bar{1}} \\ \bullet \left[\frac{\partial \varphi_a^i}{\partial \bar{\bar{d}}_a^o} \right]^D &= 2\rho \left[\bar{\bar{v}}^i \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_{e1}^i} \bar{\bar{b}}_e^i - \frac{\partial \psi}{\partial I_{e2}^i} \bar{\bar{b}}_e^{-i} \right) \cdot \bar{\bar{v}}^i \right]^D \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

En choisissant le nombre de configurations intermédiaires, les différentes énergies libres ainsi que les potentiels de dissipations intrinsèques correspondant, les équations IV.7 fournissent une large base pour la modélisation de comportements dissipatifs. Des modèles, tels que ceux de KELVIN-VOIGT, POYNTING-THOMSON, les modèles de SAINT-VENANT et de MAXWELL généralisés ou encore, le modèle élastoplastique de BINGHAM, sont totalement décrits par ces équations.

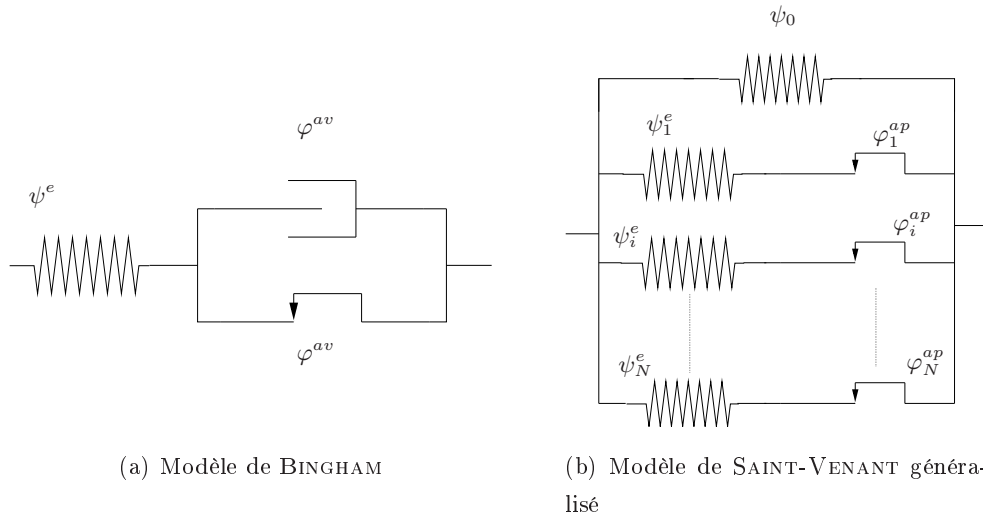


FIGURE IV.3 – Modèles rhéologiques

IV.1.2 ...Aux modèles de comportement statistiques

IV.1.2.a Modèles discrets

MARTINEZ [2005] a développé et étudié la capacité de certains modèles hyper-élasto-visco-plastiques et hyper-élastiques à refléter le comportement des élastomères chargés. Nous regroupons les principales conclusions qu'il tire de ses études :

- l'incapacité de ces modèles à rendre compte de la réponse sous chargements complexes (du type multi-frequence) pour un jeu de paramètres donné.
- l'important nombre de paramètres dont ils nécessitent et qui engendrent des difficultés d'identification
- la complexité de ces modèles, particulièrement l'utilisation d'éléments non linéaires qui ne permet pas une interprétation physique des paramètres qui faciliterait leur identification.

Cependant, une modélisation la plus fine possible d'un comportement passe par la quantité et la diversité des configurations intermédiaires. La prise en compte d'une multitude de branches permet ainsi le développement de modèles sur des domaines de déformations, de vitesses et de températures larges.

Ainsi, afin de conserver une modélisation la plus juste mais aussi la plus fonctionnelle (en terme d'identification) possible, la réduction du nombre de paramètres ne doit pas passer par la diminution du nombre de branches.

MARTINEZ *et al.* [2002] ont développé, pour ce faire, des modèles de comportement rhéologiques dit "statistiques". Avant de définir ces modèles, ils considèrent des **modèles discrets** qui s'inspirent des modèles de MAXWELL généralisés avec des pondérations de branches. Ces modèles sont présentés sur la FIGURE IV.4, ils comportent N branches, chacune caractérisée par une densité de probabilité \mathcal{P}_i .

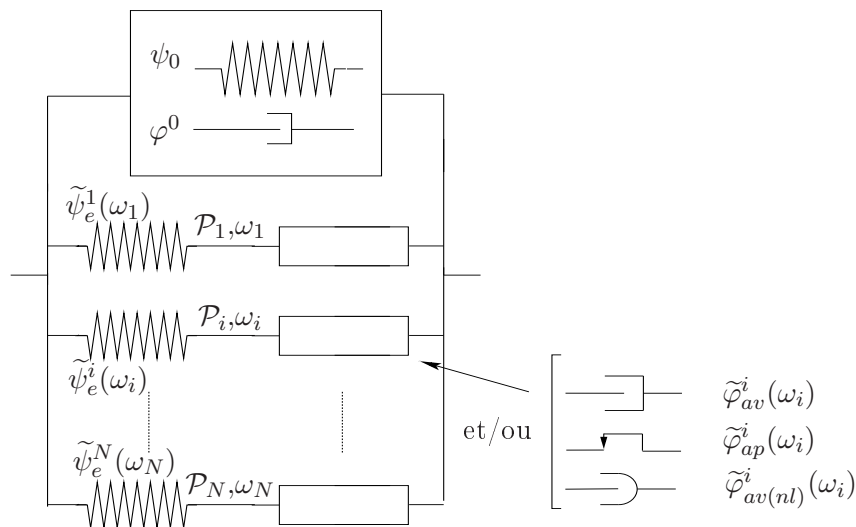


FIGURE IV.4 – Modèle rhéologique discret composé de N branches pondérées

En suivant la même logique que pour le développement des modèles multibranches, on peut définir l'énergie libre totale ψ et le pseudo-potentiel de dissipation φ par :

$$\begin{cases} \psi = \psi_0(\bar{B}) + \sum_{i=1}^N \tilde{\psi}^i(\omega_i, \bar{B}, \bar{b}_e^i(\omega_i)) \mathcal{P}_i \\ \varphi = \varphi_0(\bar{D}) + \sum_{i=1}^N \tilde{\varphi}^i(\omega_i, \bar{d}_a^i(\omega_i)) \mathcal{P}_i \end{cases} \quad (\text{IV.8})$$

Il en découle ainsi la loi de comportement et les lois complémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} & \bullet \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 + \sum_{i=1}^N \tilde{\sigma}_i(\omega_i) \mathcal{P}_i - p \bar{1} \\ & \text{avec : } \begin{cases} \bar{\sigma}_0 = 2\rho \left[\bar{B} \cdot \frac{\partial \psi^0(\bar{B})}{\partial \bar{B}} \right]^D \\ \tilde{\sigma}_i(\omega_i) = 2\rho \left[\bar{b}_e^i(\omega_i) \cdot \frac{\partial \tilde{\psi}^i(\omega_i)}{\partial \bar{b}_e^i(\omega_i)} \right]^D + \left[\frac{\partial \varphi^0}{\partial \bar{D}} \right]^D \end{cases} \\ & \bullet \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}^i(\omega_i)}{\partial \bar{d}_a^i(\omega_i)} \right]^D = 2\rho \left[\bar{v}^i(\omega_i) \cdot \frac{\partial \tilde{\psi}^i(\omega_i)}{\partial \bar{b}_e^i(\omega_i)} \cdot \bar{v}^i(\omega_i) \right]^D \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

IV.1.2.b Modèles statistiques

Le passage aux modèles statistiques, présentés sur la figure IV.5, se fait par transposition de la somme finie des équations IV.8 en une intégrale infinie, par le biais d'une densité de probabilité $\mathcal{P}(\omega)$ fonction de la variable aléatoire ω (MARTINEZ [2005]) :

$$\begin{cases} \psi = \psi_0(\bar{B}) + \int_0^\infty \tilde{\psi}(\omega, \bar{B}, \bar{b}_e(\omega)) P(\omega) d\omega \\ \varphi = \varphi_0(\bar{B}) + \int_0^\infty \tilde{\varphi}(\omega, \bar{d}_a(\omega)) P(\omega) d\omega \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

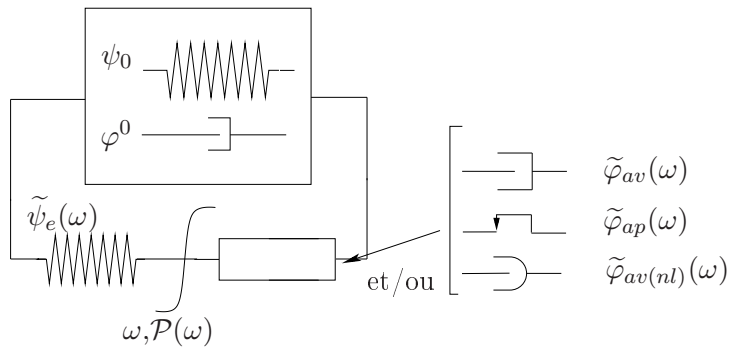


FIGURE IV.5 – Modèle rhéologique statistique

La loi de comportement et les lois complémentaires deviennent :

$$\begin{aligned}
 & \bullet \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 + \int_0^\infty \tilde{\bar{\sigma}}(\omega) \mathcal{P}(\omega) d\omega - p \bar{1} \\
 & \text{avec : } \begin{cases} \bar{\sigma}_0 = 2\rho \left[\bar{B} \cdot \frac{\partial \psi_0(\bar{B})}{\partial \bar{B}} \right]^D \\ \tilde{\bar{\sigma}}(\omega) = 2\rho \left[\bar{b}^e(\omega) \cdot \frac{\partial \tilde{\psi}(\omega)}{\partial \bar{b}^e(\omega)} \right]^D + \left[\frac{\partial \varphi^0}{\partial \bar{D}} \right]^D \end{cases} \\
 & \bullet \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}(\omega)}{\partial \bar{d}_o^a(\omega)} \right]^D = 2\rho \left[\bar{v}(\omega) \cdot \frac{\partial \tilde{\psi}(\omega)}{\partial \bar{b}^e(\omega)} \cdot \bar{v}(\omega) \right]^D
 \end{aligned} \tag{IV.11}$$

À partir de ces lois constitutives, tous les modèles rhéologiques de comportements élasto-dissipatifs, dont l'énergie libre peut se mettre sous la forme IV.2, en grandes déformations peuvent être construits.

Ainsi, ces modèles permettent de généraliser l'assemblage parallèle d'un nombre fini de branches à un assemblage statistique d'une infinité de branches. L'intérêt majeur de cette approche est qu'elle permet de tenir compte d'une infinité de branches sans pour autant multiplier le nombre de paramètres caractéristiques du modèle.

MARTINEZ [2005] a montré la capacité de ce type de modèle à traduire le comportement en cisaillement de l'élastomère VHDS E1029 sur des plages de températures et de vitesses larges, ainsi que dans le cas de chargements multi-frequentiels.

Le principal reproche qui est fait, aujourd'hui, aux modèles de comportement rhéologiques reste leur manque de signification physique, particulièrement des différents paramètres. BOUKAMEL [2006] introduit la nécessité d'une approche multi-échelle pour la construction des modèles de comportement des élastomères chargés, du fait de la complexité de la micro-structure et des mécanismes de déformation internes à ces matériaux.

L'intégration de comportements micro-structuraux dans les modèles statistiques pourrait permettre une justification de leur construction, ainsi qu'une simplification de l'identification des paramètres.

IV.2 Construction de modèles physiquement motivés

Notre étude se place dans la continuité des travaux de BOUKAMEL et MEO [2001] et MARTINEZ [2005]. À partir du cadre des modèles statistiques, nous cherchons à développer un modèle capable de décrire le comportement de l'élastomère VHDS E1029, tout en y intégrant une approche physiquement motivée.

Cette approche nécessite, avant tout, la définition de la notion d'échelle dans le matériau :

- l'échelle macroscopique, pour laquelle le matériau apparaît complètement homogène,
- l'échelle mésoscopique, plus fine, où l'on distingue matrice et charges,
- l'échelle microscopique qui nécessite des techniques particulières de visualisation et dont nous présentons les résultats dans la partie suivante.

IV.2.1 Observations microscopiques

Les observations microscopiques ont été réalisées au Microscope à Balayage Électronique (M.E.B.), en collaboration avec le Centre des matériaux de l'école des Mines de Paris par COURTOIS [2003].

Cette étude a été réalisée sur des éprouvettes de traction en élastomère silicone chargé après différents niveaux de fatigue. Les observations ont permis de mettre en avant :

- la présence au sein du matériau de divers types de charges, de tailles (charges isolées ou agglomérats), de compositions et de nocivités différentes. Nous parlerons donc d'un matériau à **plusieurs populations de charges**,
- la **localisation de l'endommagement au niveau des interfaces** entre les différentes populations de charges et la matrice,
- la présence de **cavitation rémanente**. La FIGURE. IV.6⁽¹⁾ présente l'apparition, l'évolution et la persistance de cavitations résiduelles entre charges (ou agglomérats de charges) et matrice, au repos avant tout endommagement dans un premier temps, après 100000 cycles de fatigue, puis finalement après repos des éprouvettes (état relaxé).

Ainsi à partir de ces observations, nous tentons de développer un modèle de comportement statistique dans lequel les notions de populations de charges, d'interfaces charge/matrice et de localisation de l'endommagement seront prises en compte.

(1). Les traces constatées au niveau de la matrice sur les figures IV.6(b) et (c), n'ont aucun rapport avec un quelconque endommagement. Elles sont essentiellement dues à un traitement de métallisation qu'ont subi les éprouvettes avant les observations.

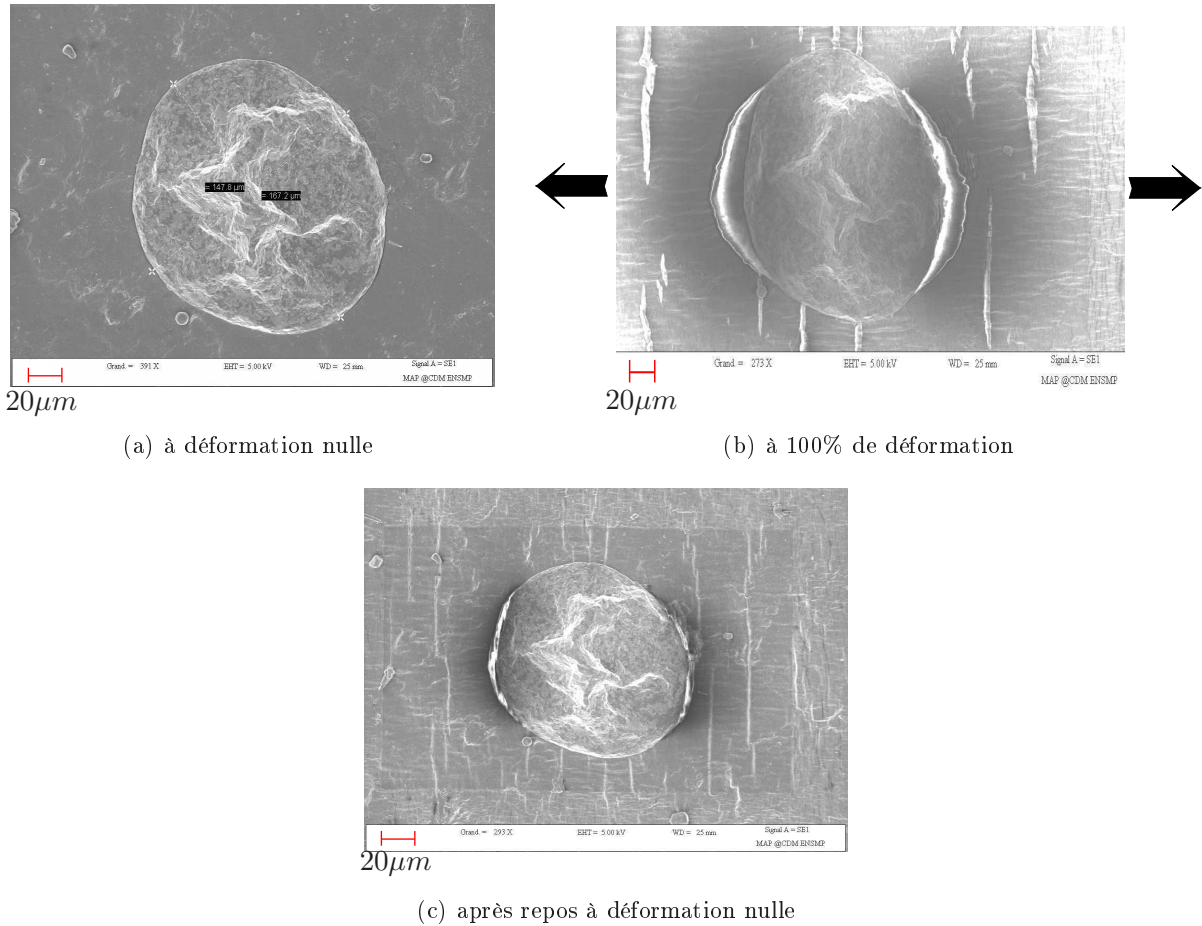


FIGURE IV.6 – Mise en évidence de la décohésion résiduelle entre charges et matrice lors d'un essai de traction dont la direction de sollicitation est donnée par les flèches (COURTOIS [2003])

IV.2.2 Hypothèses originelles du modèle

L'étude du matériau à l'échelle microscopique permet donc de visualiser une nouvelle phase que nous appelons **interfaces** (entre charges et matrice), non visibles aux échelles macroscopiques et mésoscopiques, qui est impliquée dans les mécanismes de déformation et d'endommagement. On peut alors récapituler les trois échelles de représentation du matériau sur la FIGURE IV.7.

Ainsi, les observations microscopiques, présentées dans la partie IV.2.1 permettent de distinguer trois phases dans l'élastomère :

- la **matrice**, appelée aussi gomme élastomérique,
- différentes **charges**,
- des **interfaces**, sièges d'interactions jouant un rôle important dans les micro-mécanismes de déformation de ces matériaux.

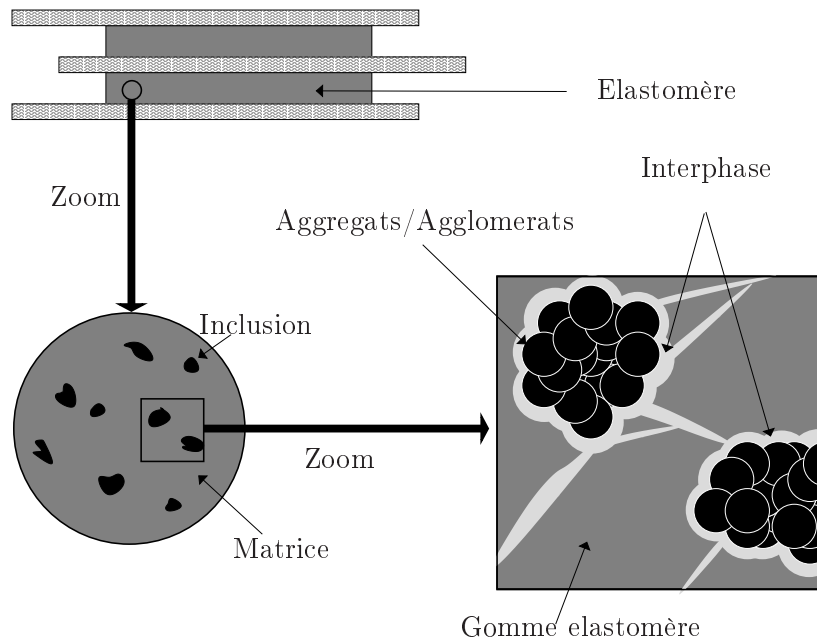


FIGURE IV.7 – Les différentes échelles de l'élastomère VHDS E1029.

À partir de ces constatations, on peut dégager un volume représentatif (VER) du matériau, présenté sur la FIGURE IV.8 (a), comprenant une partie de la matrice, une charge et une zone d'interface entre la charge et la matrice.

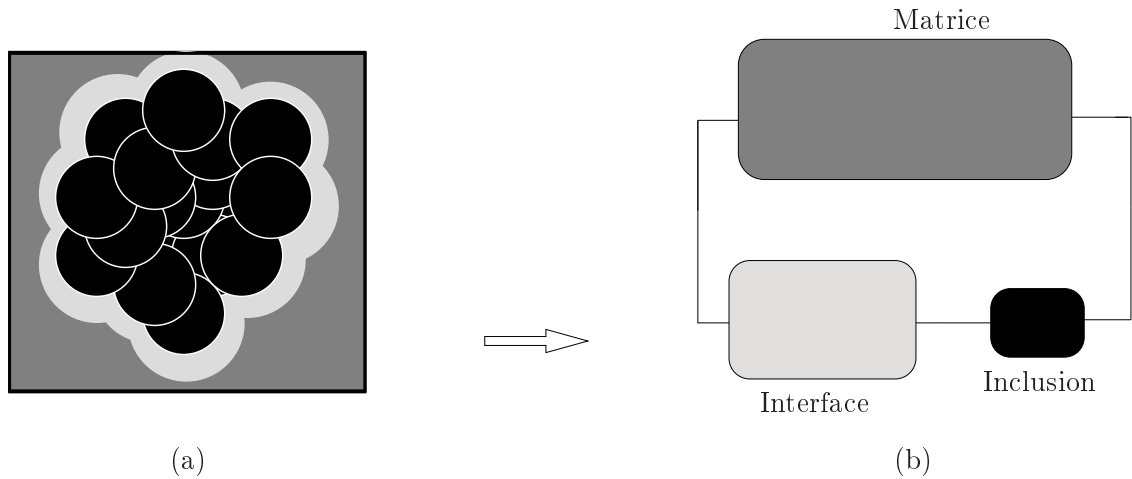


FIGURE IV.8 – Motivations du modèle de comportement unitaire

Le comportement de ce VER peut être schématisé par un **modèle unitaire** dans lequel chacune des trois phases est représentée à l'aide de modèles rhéologiques, cf FIGURE IV.8(b).

En partant de constatations expérimentales macroscopiques du "comportement" des différentes phases, nous supposons que :

- la matrice élastomérique est incompressible et peut être purement hyper-élastique ou hyper-visco-élastique,
- la charge est simplement hyper-élastique ou hyper-visco-élastique. Le caractère dissipatif représente les frottements visqueux qui peuvent apparaître dans les agglomérats,
- le comportement de l'interface peut être représenté soit par un modèle purement plastique, soit par un modèle visco-plastique. L'idée est d'associer aux interfaces des seuils de glissement, au-dessus desquels nous considérerons qu'il y a décohésion.

Différents **modèles rhéologiques unitaires**, simulant le comportement d'un VER d'un élastomère chargé, peuvent donc être construits. Nous les présentons sur la FIGURE IV.9,

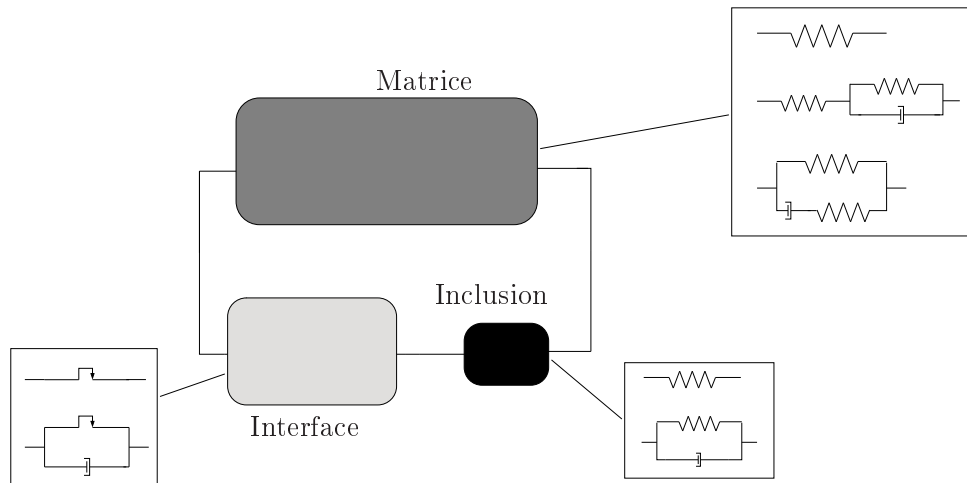


FIGURE IV.9 – *Choix des comportements de chaque constituant*

IV.2.3 Analyse des modèles unitaires

Notre choix d'un modèle de comportement unitaire parmi les possibilités présentées sur la FIGURE IV.9, s'est fait à partir d'un compromis entre le nombre de paramètres caractéristiques et la fiabilité du comportement décrit par ces modèles.

Pour ce faire, nous avons étudié le comportement des différents modèles unitaires vis à vis de deux caractéristiques comportementales propres aux élastomères :

- **l'influence de l'amplitude de déformation** (effet Payne) présentée dans le TABLEAU IV.1 : la raideur globale d'un élastomère diminue avec l'amplitude de déformation.
- **l'influence de la fréquence**, cf. TABLEAU IV.1 : Une augmentation de la vitesse de déformation entraîne une augmentation de la dissipation globale d'un élastomère.

Tous les résultats sont proposés dans le tableau IV.1. L'idée, ici, n'est pas de représenter exactement le comportement du matériau, mais d'estimer si ces modèles sont capables de décrire de façon qualitative les évolutions vis-à-vis de la fréquence et de l'amplitude des déformations des élastomères chargés. Les paramètres caractéristiques de chaque modèle n'ont donc pas fait l'objet d'une stratégie d'identification particulière pour cet exercice.

À la vue des résultats, nous optons pour deux modèles : HVP1 et HVP1_PT. Ceux-ci, pour un nombre de paramètres corrects, fournissent des comportements compatibles avec la réalité expérimentale.

Le comportement du VER sera ainsi schématisé, dans la suite, par une branche représentant le comportement de la matrice, composée soit d'un simple élément hyper-élastique (ressort), soit d'un modèle de POYNTING-THOMSON en parallèle avec une branche dite "microscopique" comprenant en série :

- un élément ressort pour le comportement de l'inclusion,
- un élément constitué d'un patin en parallèle avec un amortisseur, pour modéliser le glissement à l'interface.

Nous proposons donc deux modèles unitaires de comportement pour la modélisation de ce VER qui diffèrent uniquement par le comportement assigné à leur matrice :

- un modèle unitaire, pour lequel la matrice est hyper-élastique, modélisée par un unique ressort,
- un deuxième modèle où la matrice est modélisée par un modèle visco-élastique de type POYNTING-THOMSON.

Ces modèles ont l'avantage d'être à la fois phénoménologiques et micro-physiquement motivés.

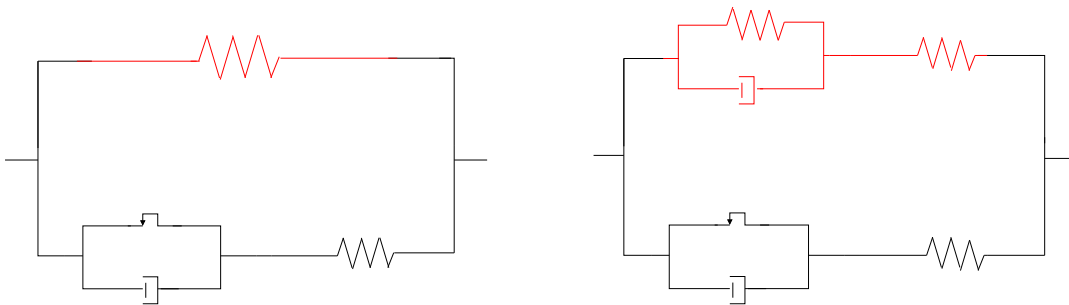


FIGURE IV.10 – *Choix des deux modèles unitaires de comportement*

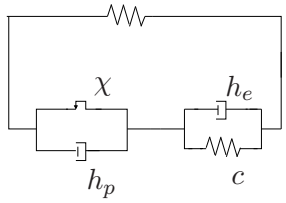
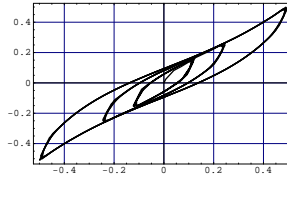
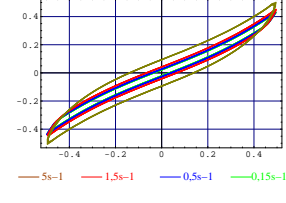
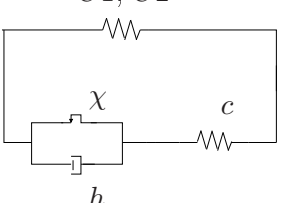
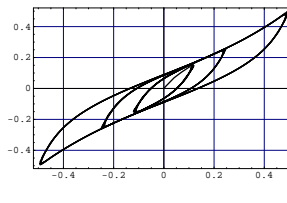
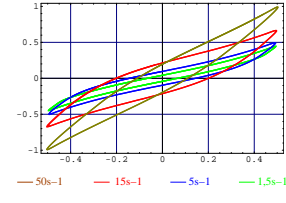
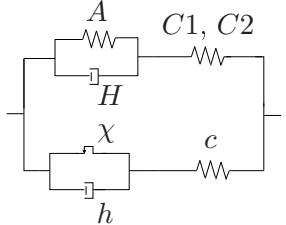
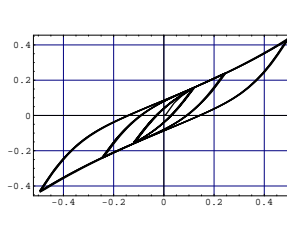
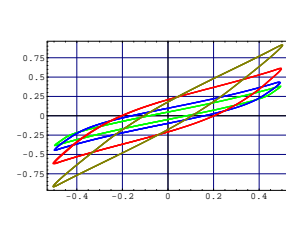
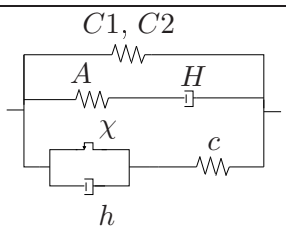
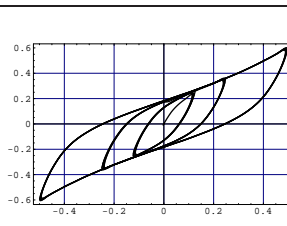
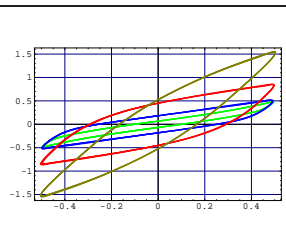
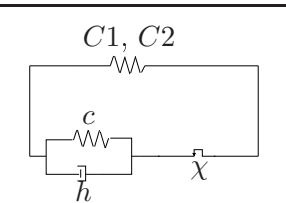
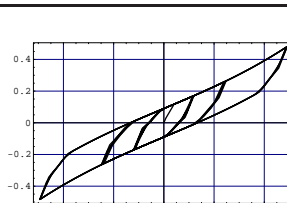
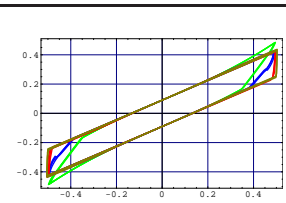
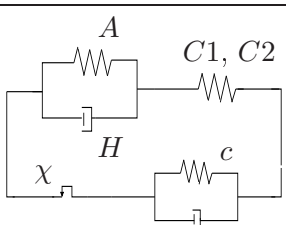
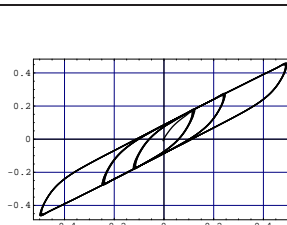
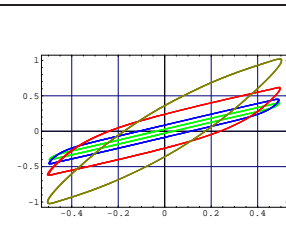
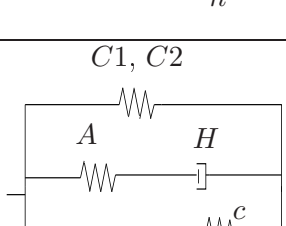
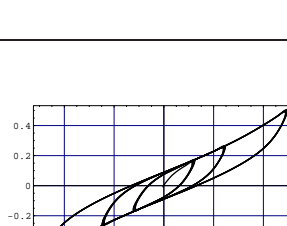
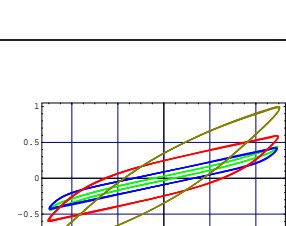
| N^o | Modèle | Nb | Influence de l'amplitude | Influence de la fréquence |
|-------------|---|----|--|---|
| HVP | $C1, C2$  | 6 |  |  |
| $HVP1$ | $C1, C2$  | 5 |  |  |
| $HVP1_{PT}$ | $C1, C2$  | 7 |  |  |
| $HVP1_Z$ | $C1, C2$  | 7 |  |  |
| $HVP2$ | $C1, C2$  | 5 |  |  |
| $HVP2_{PT}$ | $C1, C2$  | 7 |  |  |
| $HVP2_Z$ | $C1, C2$  | 7 |  |  |

TABLEAU IV.1 – Différents modèles unitaires de comportement

IV.2.4 Description des modèles statistiques

À partir des observations microscopiques, la diversité des populations de charge/interfaces au sein du matériau d'étude a été mise en avant.

Dans le but de modéliser ces différentes populations présentes dans le matériau, nous couplons l'approche des modèles statistiques développée dans le paragraphe IV.1 aux modèles unitaires.

Une première étape passe par le développement de modèles multi-branches. Nous supposons alors une classification des différentes populations de charges/interface repérées par leur **seuil de glissement**. Chaque branche du modèle discret (FIGURE IV.11(a)) est associée à une variable ω_i , directement liée au seuil de glissement du patin et à une probabilité \mathcal{P}_i .

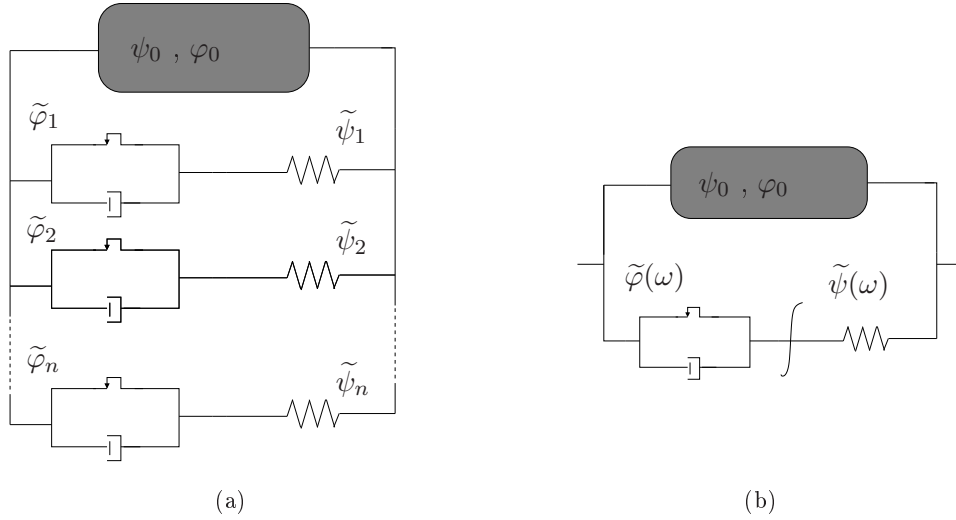


FIGURE IV.11 – Passage du modèle discret au modèle de comportement statistique

Le passage au modèle statistique (FIGURE IV.11(b)) fait intervenir une variable aléatoire ω et une densité de probabilité $\mathcal{P}(\omega)$. Ce modèle permet donc de couvrir un spectre infini de populations de charges/interface.

Finalement, la modélisation du comportement de l'élastomère chargé va être réalisée via deux modèles nommés **SHVP1**, pour Statistical Hyper-Visco-Plastic model (FIGURE IV.12(a)) et **SHVP1_PT** (FIGURE IV.12(b)). L'étude des modèles SHVP et SHVP2, construits de la même façon mais à partir des modèles unitaires HVP et HVP2 du tableau IV.1, est synthétisée dans BOUKAMEL [2006].

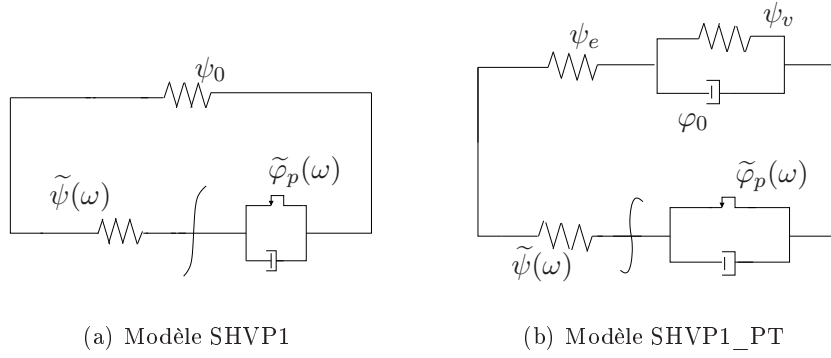


FIGURE IV.12 – Modèles de comportement statistique SHVP1 et SHVP1_PT.

IV.3 Deux modèles de comportement non endommagés

À partir des deux modèles de comportement statistique, nous développons les équations mécaniques et fixons les potentiels énergétiques nécessaires à leur description. Pour chaque modèle, nous présentons la stratégie d'identification des paramètres caractéristiques sur les essais de cisaillement d'un matériau vierge, et pour finir les modélisations obtenues en cisaillement, suivies des validations en traction.

IV.3.1 Le Modèle SHVP1

IV.3.1.a Equations constitutives du modèle SHVP1

La description des équations de ce modèle passe avant tout par une dénomination propre des différents tenseurs. Les hypothèses et le cadre thermodynamique détaillés dans la première partie de ce chapitre (IV.1) restent valables pour ces modèles.

On note $\bar{\bar{F}}$ le gradient des déformations globales. On adopte la décomposition multiplicative du gradient des déformations $\bar{\bar{F}}$ en deux sous-gradients: $\bar{\bar{f}}_e$ et $\bar{\bar{f}}_p$ reliés respectivement à la partie élastique et visco-plastique de la branche statistique. Ainsi $\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{f}}_e \cdot \bar{\bar{f}}_p$.

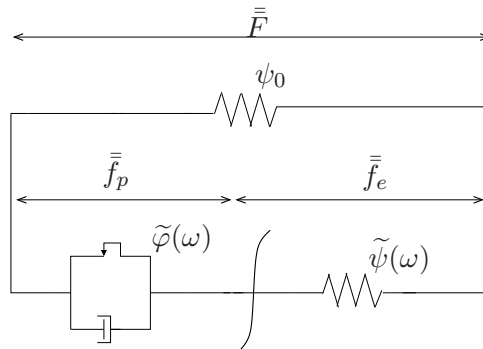


FIGURE IV.13 – Gradients de transformations nécessaires à la description du modèle SHVP1.

On note $\bar{\bar{B}}$ le tenseur de CAUCHY-GREEN gauche tel que : $\bar{\bar{B}} = \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{F}}^T$, de même pour la branche statistique avec $\bar{\bar{b}}_e$ et $\bar{\bar{b}}_p$.

On suppose pour la branche statistique la décomposition polaire du gradient de déformation élastique en une déformation pure $\bar{\bar{v}}$ et une rotation élastique $\bar{\bar{r}}$, telle que $\bar{\bar{f}}_e = \bar{\bar{v}} \cdot \bar{\bar{r}}$.

On définit aussi le taux de déformation visco-plastique $\bar{\bar{d}}_p$ et le taux de déformation visco-plastique objectif noté $\bar{\bar{d}}_p^o$ que nous impose le choix de description eulerienne tel que : $\bar{\bar{d}}_p^o = \bar{\bar{r}} \cdot \bar{\bar{d}}_p \cdot \bar{\bar{r}}^T$.

En partant des équations des lois constitutives IV.11 et en utilisant les notations précédentes, nous arrivons aux lois suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{Lois de comportement :} \\ \bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\sigma}}_0 + \int_0^\infty \bar{\bar{\sigma}}(\omega) P(\omega) d\omega - p \bar{\bar{1}} \\ \bar{\bar{\sigma}}_0 = 2\rho \left[\psi_{0,1} \bar{\bar{B}} - \psi_{0,2} \bar{\bar{B}}^{-1} \right]^D \\ \bar{\bar{\sigma}}(\omega) = 2\rho \left[\tilde{\psi}_{,1}(\omega) \bar{\bar{b}}_e(\omega) - \tilde{\psi}_{,2}(\omega) \bar{\bar{b}}_e^{-1}(\omega) \right]^D \\ \bullet \text{Loi complémentaire :} \\ 2\rho \left[\tilde{\psi}_{,1}(\omega) \bar{\bar{b}}_e(\omega) - \tilde{\psi}_{,2}(\omega) \bar{\bar{b}}_e^{-1}(\omega) \right]^D = \frac{\partial \tilde{\varphi}(\omega)}{\partial \bar{\bar{d}}_p^o(\omega)} \end{array} \right.$$

$\psi_{0,i}$ est la dérivée de ψ_0 par rapport au i-ème invariant ($I_{i=1,2}$) de $\bar{\bar{B}}$ et $\tilde{\psi}_{,i}$, la dérivée de $\tilde{\psi}$ par rapport au i-ème invariant de $\bar{\bar{b}}_e$.

À partir de ces équations, le modèle statistique de la FIGURE IV.13 est complètement défini. Le choix des différentes énergies de déformation et potentiels de dissipation vont maintenant conditionner le nombre de paramètres et la qualité du modèle.

IV.3.1.b Choix des énergies, des potentiels et des fonctions statistiques

Le développement de modèles statistiques requière, en plus du choix des énergies libres ψ_0 et $\tilde{\psi}$ et du pseudo-potentiel de dissipation $\tilde{\varphi}$, la définition des paramètres statistiques. Ceux-ci regroupent la densité de probabilité $\mathcal{P}(\omega)$ et l'évolution des paramètres de $\tilde{\psi}(\omega)$ et $\tilde{\varphi}(\omega)$ avec le paramètre statistique ω .

Des formes simples de type GENT-THOMAS sont choisies pour les énergies de déformation, et de types quadratiques pour les pseudo-potentels de dissipation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0 = C_1 \left(I_1(\bar{\bar{B}}) - 3 \right) + C_2 \ln\left(\frac{I_2(\bar{\bar{B}})}{3} \right) \\ \tilde{\psi}(\omega) = a(\omega) \left(I_1(\bar{\bar{b}}_e(\omega)) - 3 \right), \forall \omega \geq 0 \\ \tilde{\varphi}(\omega) = \frac{\eta(\omega)}{2} \bar{\bar{d}}_p^o(\omega) : \bar{\bar{d}}_p^o(\omega) + \chi(\omega) \|\bar{\bar{d}}_p^o(\omega)\| \end{array} \right.$$

Le choix de l'évolution des paramètres avec la variable statistique ω nécessite une attention particulière. Le choix le plus évident et qui découle directement du développement du modèle, est celui de $\chi(\omega)$. Le modèle de comportement a été développé en supposant que le paramètre statistique était directement lié aux seuils de glissement des interfaces. Pour rester dans cette logique, nous choisissons $\chi(\omega)$ de la forme :

$$\chi(\omega) = \bar{\chi} \frac{\omega}{\omega_0}$$

La forme choisie entraîne l'introduction d'un nouveau paramètre : ω_0 .

Pour les fonctions $a(\omega)$ et $\eta(\omega)$, les hypothèses suivantes sont faites :

- plus une charge est rigide, plus le seuil de décohésion de son interface sera faible. Ainsi, puisque $\chi(\omega)$ est directement proportionnel à ω , on suppose que $a(\omega) = a_0 \text{Exp}(-\frac{\omega}{\omega_0})$,
- la viscosité de l'interface est d'autant plus faible que le seuil de décohésion de la même interface est grand. Ainsi $\eta(\omega) = \bar{\eta} \frac{\omega}{\omega_0}$.

La densité de probabilité $\mathcal{P}(\omega)$ est choisie sous la forme d'une gaussienne, centrée en 0, d'écart type Ω . Ainsi à partir de cette densité de probabilité, il est possible de balayer un spectre de seuils de glissement infini, tout en contrôlant la largeur du pic central (cf. FIGURE. IV.14).

$$P(\omega) = \frac{1}{P_0} \exp\left(-\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2\right), \forall \omega \geq 0 \quad \text{avec} \quad P_0 = \int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2\right] d\omega$$

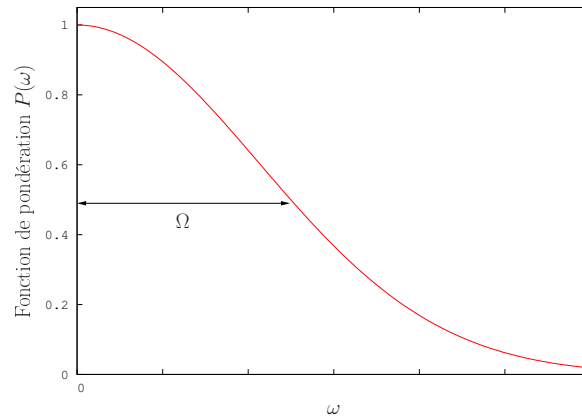


FIGURE IV.14 – Forme de la densité de probabilité pour les modèles de comportement statistiques

Ce modèle, de par les choix des énergies et potentiels de dissipation, nécessite la caractérisation de 7 paramètres :

- 6 paramètres déterministes : C_1 , C_2 , a_0 , $\bar{\eta}$, $\bar{\chi}$ et ω_0
- 1 paramètre statistique : Ω

IV.3.1.c Identification et résultats en traction

IV.3.1.d Identification, résultats et validation du modèle SHVP1

Nous cherchons ici à développer un modèle de comportement non endommagé. Les paramètres de ce modèle doivent alors être identifiés sur des essais expérimentaux non fatigués (dont le comportement n'est pas dépendant de la configuration des essais de fatigue) et ne présentant plus d'effet Mullins. La figure IV.15 présente une superposition de l'essai caractéristique de charge-décharge quasi-statique, obtenus en cisaillement, après 100 cycles à différentes configurations de fatigue (15Hz ou 6Hz, pour des déformations de 12,5% ou 25% et avec ou sans pré-déformation). Ces essais présentent bien cette non dépendance avec la configuration de fatigue, qui caractérise des courbes non endommagées.

Nous choisissons, alors, arbitrairement l'essai fatigué à 15Hz, 100 cycles, 25% d'amplitude dynamique sans pré-déformation, pour la caractérisation des paramètres du modèle de référence.

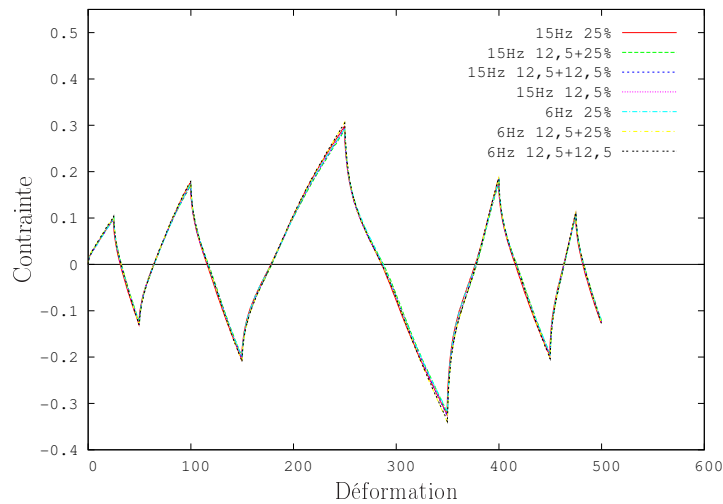


FIGURE IV.15 – Comparaison des charges/décharges quasi-statiques après 100 cycles pour différentes configurations d'essai

L'algorithme d'identification que nous utilisons, ici, est développé sur MATHEMATICA®. Il est basé sur un algorithme de descente, sans calcul de gradient, avec une méthode de recherche locale du minimum suivant chaque direction et un parcours successif des différentes directions. Cet algorithme est présenté en ANNEXE E

Les travaux de thèse de MARTINEZ [2005] ont mis en avant les difficultés à développer une stratégie d'identification des paramètres de modèles de comportement complexes.

Nous avons, ainsi, développé pour la caractérisation des sept paramètres du modèle SHVP1, une stratégie d'identification découplée qui permet de distinguer les effets d'hyper-élasticité des effets de viscosité et de plasticité. La variété d'essais caractéristiques que nous possédons permet ce

découpage en deux étapes :

- d'abord en pré-identifiant les paramètres sur un essai quasi-statique ($\gamma \sim 0$) et un essai de relaxation ($\gamma = \text{cst}$),
- puis en venant corriger ces paramètres sur les essais triangulaires à différents taux de déformation.

Le TABLEAU IV.2 présente cette stratégie d'identification.

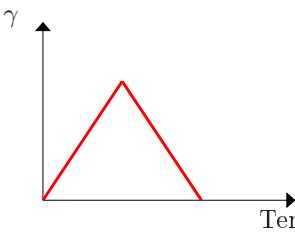
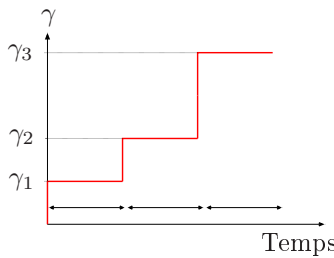
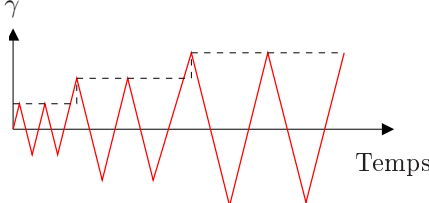
| Étape | Essais caractéristiques | Paramètres |
|--------------------|---|---|
| Pré-identification | <p><i>Charge-Décharge à différents γ_{max}</i></p>  <p><i>Relaxation différents γ_i</i></p>  | <p>Identification de: C_1, C_2, $\bar{\chi}$ et ω_0</p> <p>Estimation de: a_0, $\bar{\eta}$ et Ω</p> |
| Correction | <p><i>Cyclique triangulaire à différents $\dot{\gamma}_i$</i></p>  | <p>Ajustement de: a_0, $\bar{\eta}$ et Ω</p> |

TABLEAU IV.2 – Stratégie d'identification des paramètres de référence du modèle SHVP1

Les résultats de l'identification de référence sont présentés dans le TABLEAU IV.3.

| C_1 (MPa) | C_2 (MPa) | a_0 (MPa) | $\bar{\chi}$ (MPa) | $\bar{\eta}$ (MPa.s) | ω_0 | Ω |
|-------------|-------------|-------------|--------------------|----------------------|------------|----------------------|
| 1,02 | -2 | 10,85 | 0,14 | $1,34 \cdot 10^{-2}$ | 0,10 | $1,45 \cdot 10^{-1}$ |

TABLEAU IV.3 – Paramètres du modèle SHVP1, identifiés en deux étapes pour le cisaillement

Les courbes obtenues lors des différentes étapes d'identification sont proposées sur les FIGURES. IV.16 et IV.17. Celles-ci montrent la fiabilité :

- du modèle, puisqu'il permet de simuler le comportement du matériau à amplitudes successives et à différents taux de déformation,
- de la stratégie d'identification qui fournit des paramètres que l'on peut facilement relier à des mécanismes physiques de comportement.

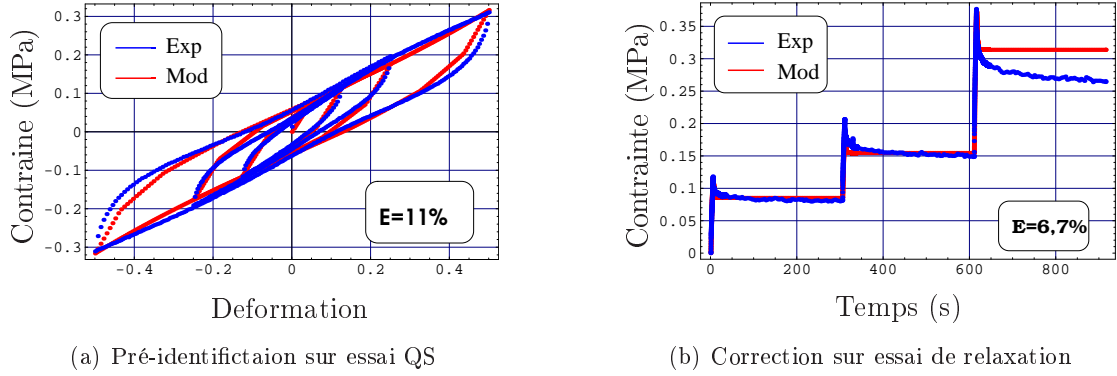


FIGURE IV.16 – *Pré-identifications des paramètres du modèle SHVP1 sur l'essai quasi-statique et l'essai de relaxation à amplitude de déformation croissante*

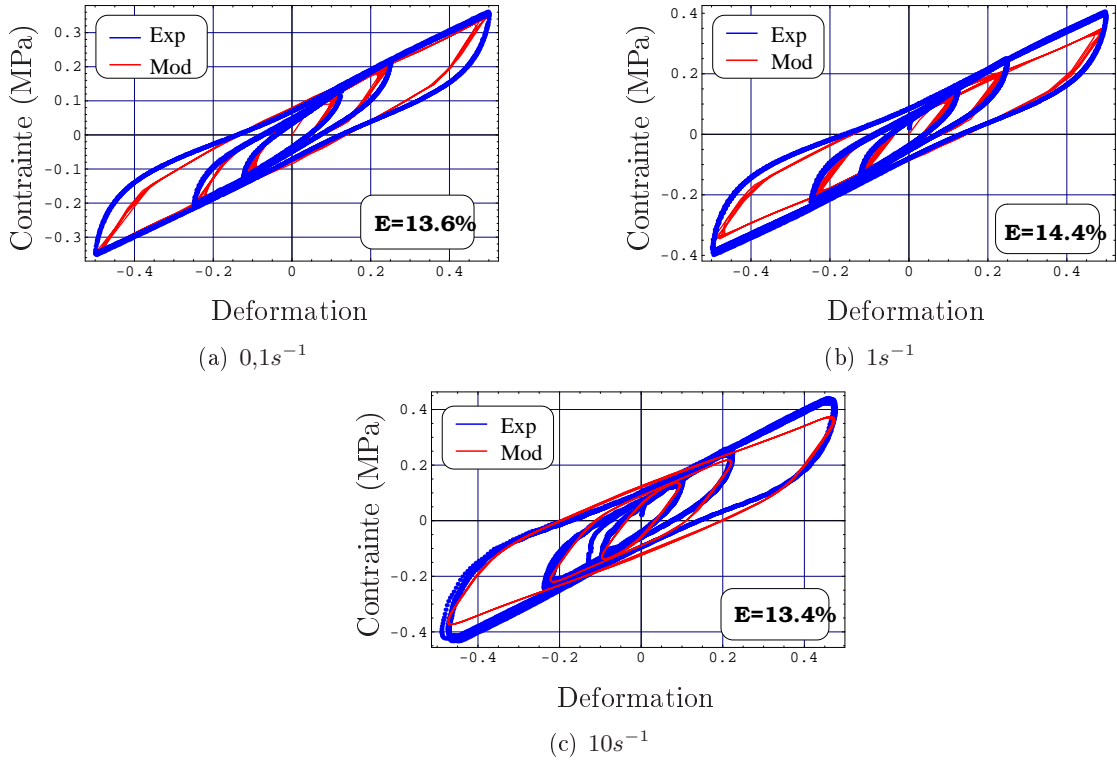


FIGURE IV.17 – *Ajustement des paramètres du modèle SHVP1 sur les essais triangulaires à amplitude de déformation croissante à différents taux de déformation*

Les erreurs au sens des moindres carrés, que nous obtenons sont comprises entre 6% et 16% ce qui, sur une plage de déformations allant de 12,5% à 50%, restent raisonnables. La modélisation de l'essai de relaxation reste la moins concluante pour le niveau de relaxation à 50%. Le modèle ne permet donc pas de reproduire exactement la viscosité du matériau pour des déformations de cet ordre.

Nous avons validé ce jeu de paramètres sur les essais de caractérisation réalisés en traction.

Nous avons choisi la configuration d'essai fatiguée à 50% de déformation à 1000 cycles, comme configuration de référence. Nous présentons une comparaison de la réponse du modèle et de la réponse expérimentale sur la courbe IV.18.

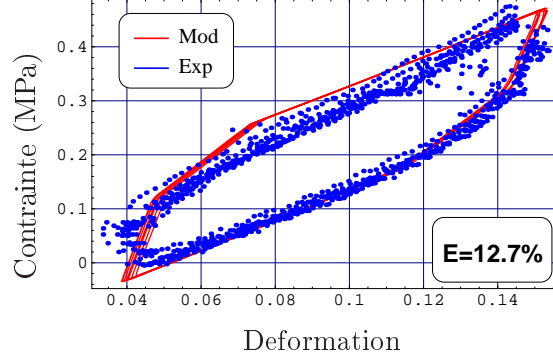


FIGURE IV.18 – Validation du modèle SHVP1 sur un essai de traction

Nous avons donc mis en place une stratégie d'identification des 7 paramètres du modèle SHVP1 qui nous permet d'obtenir un **jeu de paramètres de référence**, que nous avons validé sur les essais expérimentaux réalisés en traction.

IV.3.2 Le modèle SHVP1_PT

IV.3.2.a Equations constitutives du modèle SHVP1_PT

Comme pour le modèle SHVP1, nous allons dans un premier temps, décrire les variables du modèle puis les lois constitutives.

La branche statistique étant la même que pour le modèle SHVP1, seules les lois visant la branche reliée au comportement de la matrice vont évoluer. On suppose alors dans ce cas, une décomposition multiplicative du tenseur des déformations $\bar{\bar{F}}$ en deux tenseurs $\bar{\bar{F}}_e$ et $\bar{\bar{F}}_v$ définis sur la FIGURE IV.19, tels que $\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{F}}_v \cdot \bar{\bar{F}}_e$.

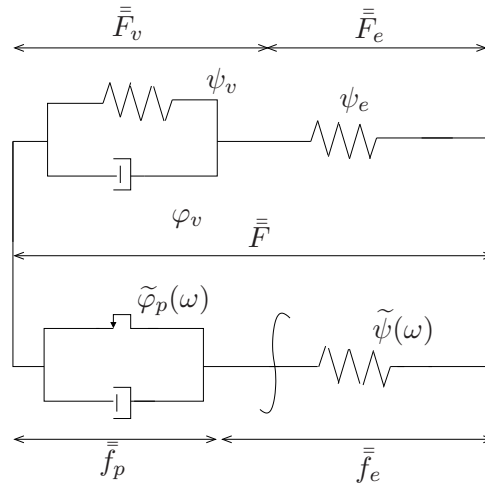


FIGURE IV.19 – Gradients de déformation nécessaires à la description du modèle SHVP1_PT.

De la même façon que pour la branche statistique, on définit un tenseur des vitesses de déformation matricielle objectif $\bar{\bar{D}}_v^o$, défini par $\bar{\bar{D}}_v^o = \bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{D}}_v \cdot \bar{\bar{R}}^T$, en supposant une décomposition polaire du gradient de déformation élastique $\bar{\bar{F}}_e = \bar{\bar{V}} \cdot \bar{\bar{R}}$. Ainsi les équations régissant le modèle SHVP1_PT deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{Lois de comportement :} \\ \bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\sigma}}_m + \int_0^\infty \bar{\bar{\sigma}}(\omega) P(\omega) d\omega - p \bar{\bar{1}} \\ \bar{\bar{\sigma}}_m = 2\rho \left[\psi_{e,1} \bar{\bar{B}}_e - \psi_{e,2} \bar{\bar{B}}_e^{-1} \right]^D \\ \bar{\bar{\sigma}}(\omega) = 2\rho \left[\tilde{\psi}_{,1}(\omega) \bar{\bar{b}}_e(\omega) - \tilde{\psi}_{,2}(\omega) \bar{\bar{b}}_e^{-1}(\omega) \right]^D \\ \bullet \text{Lois complémentaires :} \\ 2\rho \left[\psi_{e,1} \bar{\bar{B}}_e - \psi_{e,2} \bar{\bar{B}}_e^{-1} + 2\psi_{v,1} \bar{\bar{V}} \bar{\bar{B}} \bar{\bar{V}}^{-1} \right]^D = \frac{\partial \varphi_v}{\partial \bar{\bar{D}}_v^o} \\ 2\rho \left[\tilde{\psi}_{,1}(\omega) \bar{\bar{b}}_e(\omega) - \tilde{\psi}_{,2}(\omega) \bar{\bar{b}}_e^{-1}(\omega) \right]^D = \frac{\partial \tilde{\varphi}_p(\omega)}{\partial \bar{\bar{d}}_p^o(\omega)} \end{array} \right.$$

IV.3.2.b Choix des énergies, des potentiels et des fonctions statistiques

Pour ce qui est des énergies libres et pseudo-potentiels de dissipation liés à la branche statistique, nous utilisons les mêmes que ceux du modèle SHVP1. Les énergies libres de la branche matricielle sont choisies de type GENT-THOMAS à 2 paramètres pour ψ_e et à un paramètre pour ψ_v . Le pseudo-potentiel de dissipation lié à la matrice est choisi, lui, de la forme quadratique fonction du taux de déformation matricielle objectif $\bar{\bar{D}}_v^o$. Ainsi l'ensemble des fonctions énergétiques ou dissipatives du modèle sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_e = C_1 \left(I_1(\bar{\bar{B}}_e) - 3 \right) + C_2 \ln \left(\frac{I_2(\bar{\bar{B}}_e)}{3} \right) \\ \psi_v = A \left(I_1(\bar{\bar{B}}_v) - 3 \right) \\ \varphi_v = \frac{H}{2} \bar{\bar{D}}_v^o : \bar{\bar{D}}_v^o \\ \tilde{\psi}(\omega) = a(\omega) \left(I_1(\bar{\bar{b}}_e(\omega)) - 3 \right), \forall \omega \geq 0 \\ \tilde{\varphi}(\omega) = \frac{\eta(\omega)}{2} \bar{\bar{d}}_p^o(\omega) : \bar{\bar{d}}_p^o(\omega) + \chi(\omega) \|\bar{\bar{d}}_p^o(\omega)\| \end{array} \right.$$

Les mêmes évolutions des paramètres statistiques sont choisies soit :

$$\chi(\omega) = \bar{\chi} \frac{\omega}{\omega_0} \quad , \quad a(\omega) = a_0 \text{Exp} \left(-\frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad , \quad \eta(\omega) = \bar{\eta} \frac{\omega}{\omega_0}$$

La densité de probabilité $\mathcal{P}(\omega)$ est la même pour les deux modèles. On retrouve alors une densité de probabilité de la forme d'une gaussienne centrée en 0 et d'écart type Ω .

Ce deuxième modèle : SHVP1_PT est ainsi défini par 9 paramètres :

- 8 paramètres déterministes : C_1 , C_2 , A , H , a_0 , $\bar{\eta}$, $\bar{\chi}$ et ω_0
- 1 paramètre statistique : Ω

IV.3.2.c Identification, résultats et validation du modèle SHVP1_PT

Etant donné, la qualité des réponses expérimentales obtenue en cisaillement, l'identification des neuf paramètres de référence du modèle a été réalisée, comme pour le modèle SHVP1, sur les essais de caractérisation réalisés après 100 cycles de fatigue à 25% de déformation dynamique, sans pré-déformation, à 15Hz.

Nous rappelons que l'algorithme d'identification est exposé en ANNEXE E. Pour faciliter l'identification, nous avons découpé la caractérisation des paramètres en trois étapes (cf TABLEAU IV.4).

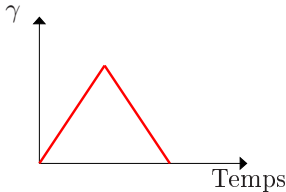
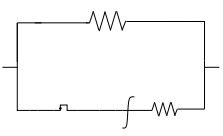
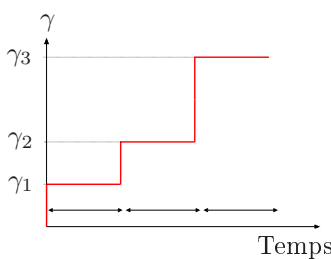
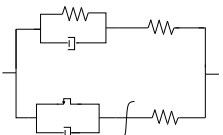
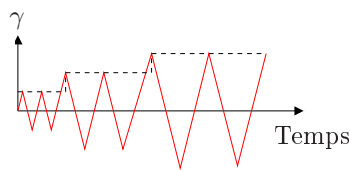
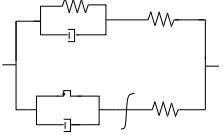
| Étape | Essais | Modèle identifié | Paramètres |
|---------------------------|--|--|---|
| (1) Pré-identification | <p><i>Charge-Décharge à différents γ_{max}</i></p>  |  | <p>Identification de : C_1, C_2</p> <p>Estimation de : A, a_0^*, ω_0^*, $\bar{\chi}^*$ et Ω^*</p> |
| (2) Ajustement macro | <p><i>Relaxation différents γ_i</i></p>  |  | <p>Ajustement de : A, H et ω_0</p> <p>Correction de : a_0^*, $\bar{\eta}^*$, $\bar{\chi}^*$ et Ω^*</p> |
| (3) Ajustement micro | <p><i>Cyclique triangulaire à différents γ_i</i></p>  |  | <p>Ajustement de : a_0, $\bar{\chi}$, $\bar{\eta}$ et Ω</p> |

TABLEAU IV.4 – Stratégie d'identification des paramètres de référence du modèle SHVP1_PT

Ces étapes ont consisté en :

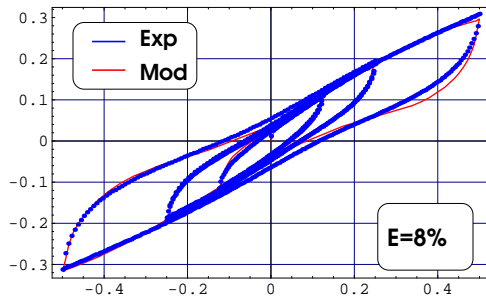
- une pré-identification des paramètres sur un essai quasi-statique, qui nous a permis de fixer les paramètres reliés à l'énergie libre ψ_e (C_1 , C_2),
- un ajustement des paramètres hyper-élasto-visco-plastiques sur un essai de relaxation à trois niveau de déformation (A , H et ω_0),
- et enfin un ajustement des paramètres microscopiques et du paramètre statistique sur des essais cycliques triangulaires à γ_{\max} progressivement croissant.

Les valeurs des paramètres de référence du modèle SHVP_PT identifiées sont données dans le TABLEAU IV.5.

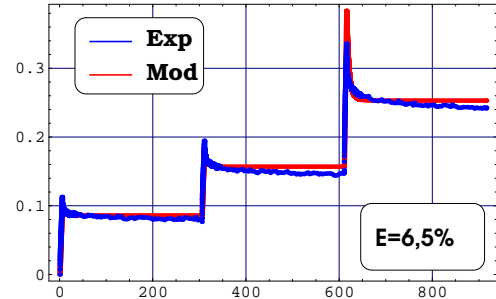
| C_1 (MPa) | C_2 (MPa) | A (MPa) | H (MPa.s) | a_0 (MPa) | $\bar{\chi}$ (MPa) | $\bar{\eta}$ (MPa.s) | ω_0 | Ω |
|-------------|-------------|-----------|-------------|-------------|--------------------|----------------------|------------|----------------------|
| 1,28 | -2,67 | 2,95 | 50,13 | 5,12 | 1,69 | 0,50 | 0,40 | $3,11 \cdot 10^{-2}$ |

TABLEAU IV.5 – Paramètres du modèle SHVP1_PT identifiés en trois étapes pour le cisaillement

Nous présentons sur les FIGURES IV.20 et IV.21, les courbes obtenues après chaque étape d'identification.



(a) Pré-identification sur essai QS



(b) Correction sur essai de relaxation

FIGURE IV.20 – Pré-identifications des paramètres du modèle SHVP1_PT sur l'essai quasi-statique et l'essai de relaxation à amplitude de déformation croissante

Ces résultats, obtenus à partir du modèle de comportement SHVP1_PT montrent une meilleure concordance avec les courbes expérimentales que le modèle SHVP1.

Il faut, en effet, noter la justesse de la courbe de relaxation pour une déformation de 50%. Le modèle SHVP1_PT paraît donc plus apte à représenter le caractère visqueux du matériau d'étude. De plus, ce modèle est capable de modéliser le léger étranglement que l'on peut constater sur l'essai quasi-statique et l'essai triangulaire à $10s^{-1}$ (pour une déformation nulle), que ne présente pas le modèle SHVP1. Cette dissymétrie de la modélisation est due à la forme hyper-élastique du modèle de GENT-THOMAS et est accentuée dans le cas où la matrice est hyper-visco-élastique.

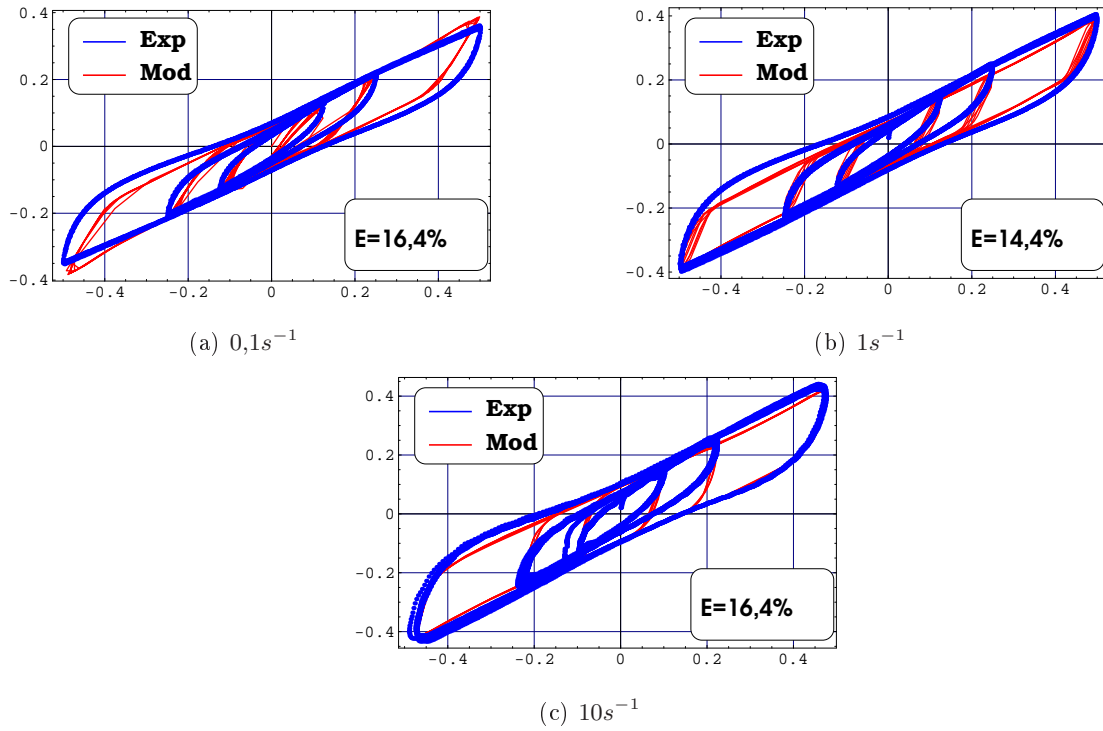


FIGURE IV.21 – Ajustement des paramètres du modèle *SHVP1_PT* sur les essais triangulaires à amplitude de déformation croissante à différents taux de déformation

Nous avons testé ce jeu de paramètres de référence sur les essais de traction fatigués à 50% après 1000 cycles. La courbe que nous avons obtenue, présentée sur la figure IV.22 permet de conclure sur la validité du modèle.

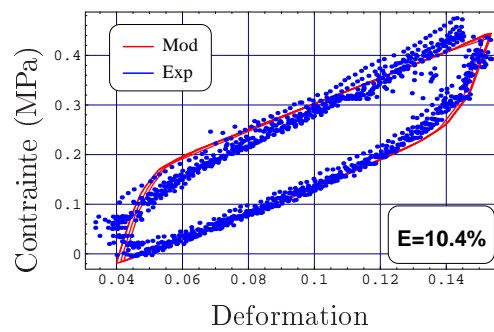


FIGURE IV.22 – Validation du jeu de paramètres de référence du modèle *SHVP1_PT* sur un essai de traction

Le jeu de paramètres de référence permet d'obtenir un modèle de comportement fiable pour un matériau élastomère chargé non endommagé, à température ambiante, sollicité sur une large plage d'amplitude et de vitesses de déformation.

IV.4 Conclusion

À partir des travaux de MEO [2000] et MARTINEZ [2005] qui ont fourni les premiers développements de modèles statistiques de comportement, nous avons cherché à développer des modèles statistiques ayant un sens le plus physique possible.

Des études microscopiques expérimentales ont permis de mettre en avant au sein de notre matériau d'étude, diverses populations de charges (différentes par leur taille et leur type) dont la présence entraîne la formation d'interfaces qui semblent être les lieux, au moins initiaux, des mécanismes d'endommagement.

L'interaction de ces observations microscopiques et des modèles statistiques nous ont entraîné vers le développement de deux modèles de comportement statistiques pour lesquels les trois phases distinctes à l'échelle microscopique sont représentées (matrice, charges et interfaces). Ces deux modèles diffèrent uniquement par le choix du comportement assigné à la matrice. Dans la littérature, on trouve deux interprétations des mécanismes de viscosité : l'un directement relié aux charges, l'autre justifié par un glissement entre les chaînes macromoléculaires et donc tourné vers la matrice. Ainsi, nous avons opté pour deux modèles de comportement dont l'un possède une branche matricielle non visqueuse (toute la viscosité est alors liée aux comportements des charges et interfaces), c'est le modèle dit SHVP1, alors que le deuxième modèle SHVP1_PT présente une branche matricielle de type POYNTING-THOMSON visco-élastique.

L'identification des paramètres des modèles à l'aide de découplage, a permis l'obtention d'un jeu de paramètres pour chaque modèle. Ces paramètres permettent de fixer, une fois pour toute et dans le cas de l'élastomère chargé de silice, deux modèles de comportement micro-physiquement motivés. La bonne similitude entre modèles et expériences nous permet de conclure sur :

- le choix judicieux des modèles
- la stratégie d'identification mise en place pour les deux modèles de comportement.

Les deux modèles de comportement non endommagé fixés, nous nous tournons vers l'étude de la modélisation de l'endommagement. Du fait de leur origine, ces deux modèles doivent être capables, par l'évolution de leurs paramètres, de traduire les mécanismes d'endommagement microscopiques. Pour simplifier, l'étude de l'endommagement dans la suite de ce travail, nous nous tournons vers le choix d'un unique modèle. Etant donné, les meilleures concordances qu'offre le modèle SHVP1_PT avec les résultats expérimentaux non endommagés, nous optons pour ce modèle afin de développer un modèle d'endommagement de l'élastomère VHDS E1029.

CHAPITRE V

Modélisation de l'endommagement

————— oOo —————

Les observations microscopiques, de l'élastomère étudié, ont mis en évidence les micro-mécanismes d'endommagement et ont pointé du doigt les localisations privilégiées de ces mécanismes au niveau des interfaces charge/matrice, sous forme de cavitations résiduelles.

Les études menées lors de la campagne expérimentale de fatigue ont permis, quant à elles, de caractériser les mécanismes macroscopiques de l'endommagement : assouplissement et diminution de la dissipation.

À partir de ces observations, une étude de l'influence des paramètres du modèle SHVP1_PT sur le comportement global, a permis de localiser les éléments impliqués dans ces mécanismes microscopiques. Les paramètres liés à ces éléments rhéologiques (C_1 (respectivement C_2) et Ω) sont ré-identifiés sur les essais de traction pour les différentes configurations de fatigue. L'évolution des paramètres nous a finalement conduit vers l'introduction de deux endommagements intervenant simultanément : un endommagement D relié à la branche matricielle, et un autre, d , à la branche statistique. Les lois d'évolution ont été développées en supposant un cumul linéaire de l'endommagement, de même que l'isotropie de celui-ci.

Pour finir, une simulation éléments finis (EF) du comportement en cisaillement d'une éprouvette DC a été réalisée sur la base du modèle de comportement couplé aux deux lois d'évolution. Ces validations sont présentées pour conclure ce chapitre.

————— oOo —————

PLAN DU CHAPITRE V

| | | |
|------------|--|------------|
| V.1 | Evolution du modèle SHVP1_PT avec la fatigue | 127 |
| V.1.1 | Etude de l'influence des paramètres sur le comportement en fatigue . . | 127 |
| V.1.2 | Identification des paramètres du modèle SHVP1_PT avec la fatigue . . | 129 |
| V.2 | Proposition d'un modèle d'endommagement en fatigue | 131 |
| V.2.1 | Hypothèses et définitions | 131 |
| V.2.2 | Analyse des évolutions | 132 |
| V.2.3 | Écriture des lois d'évolution des endommagements | 133 |
| V.3 | Vers une modélisation éléments finis du modèles endommageable | 138 |
| V.3.1 | Implémentation Éléments finis | 138 |
| V.3.1.a | Formulation variationnelle | 138 |
| V.3.1.b | Intégration du comportement matriciel | 139 |
| V.3.1.c | Intégration du comportement statistique | 139 |
| V.3.1.d | Intégration des lois d'endommagement | 140 |
| V.3.2 | Simulations numériques des essais de double-cisaillement, en vue d'une validation du modèle d'endommagement | 140 |
| V.4 | Conclusion | 144 |

V.1 Evolution du modèle SHVP1_PT avec la fatigue

L'endommagement des élastomères, du type VHDS E1029 peut être observé à deux échelles :

- l'échelle microscopique, correspondant aux observations réalisées au MEB. Elles ont permis de mettre en avant l'influence des interfaces charge/matrice sur l'endommagement de l'élastomère, en faisant ressortir l'apparition et l'évolution de cavitations résiduelles dans ces zones, en corrélation avec un endommagement croissant du matériau. Ce phénomène de cavitation interphasique semble être le mécanisme principal d'initiation d'endommagement.
- l'échelle macroscopique, à partir des courbes expérimentales obtenues en traction et en cisaillement qui ont fait ressortir les deux évolutions macroscopiques caractéristiques de l'endommagement de ce matériaux :
 - une diminution de la raideur global du matériau avec le nombre de cycles,
 - une diminution de la dissipation caractérisée par une diminution de l'aire des hystérésis

À partir de ces observations de l'endommagement et du modèle SHVP1_PT, nous tentons, dans ce chapitre, de développer un modèle capable de reproduire convenablement ces pertes de raideur et de dissipation avec la fatigue du matériau, tout en restant dans le cadre des motivations micro-physiques qui sont à la base de ce modèle.

V.1.1 Etude de l'influence des paramètres sur le comportement en fatigue

Dans un premier temps, nous cherchons à appréhender les paramètres qui contrôlent principalement la rigidité et la dissipation globales, à partir du modèle SHVP1_PT.

• Branche matricielle :

Le rhéologie parallèle du modèle implique l'influence des paramètres C_1 et C_2 sur la raideur globale. En effet, une analogie avec le comportement en petites déformations nous amène à la formule du module d'élasticité : $E = 6(C_1 + \frac{C_2}{3})$.

C_1 et C_2 caractérisent principalement et de façon similaire la rigidité globale du modèle. La FIGURE V.1 montre l'influence de ces paramètres.

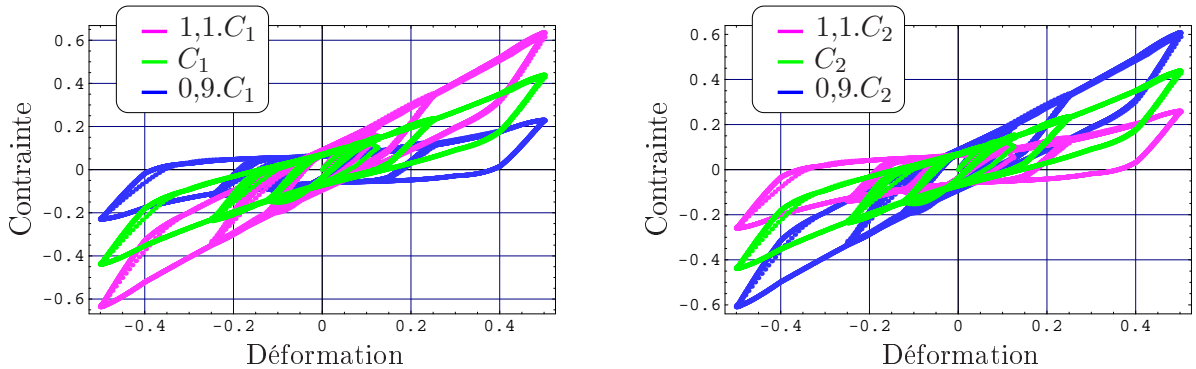


FIGURE V.1 – Influence des paramètres C_1 et C_2 sur la réponse globale du modèle SHVP1_PT.

• **Branche statistique :**

L'influence de la branche statistique, du modèle SHVP1_PT, est caractérisée par la densité de probabilité :

$$P(\omega) = \frac{1}{P_0} \exp\left(-\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2\right), \forall \omega \geq 0 \quad \text{avec} \quad P_0 = \int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2\right] d\omega$$

L'écart type Ω permet donc de prendre en compte un spectre plus ou moins large de branches et par conséquent, de types d'interfaces :

- Un écart type élevé va permettre, du fait que : $\chi(\omega) = \bar{\chi} \cdot \frac{\omega}{\omega_0}$, de tenir compte d'un large spectre de seuils de glissement (courbe $\mathcal{P}_2(\omega)$ de la FIGURE V.2(a)).
- À l'inverse, une valeur faible de " Ω " entraîne la prise en compte d'une petite population de branches statistiques dont les seuils de glissement restent faibles (courbe $\mathcal{P}_1(\omega)$ de la FIGURE V.2(a)).

À partir de ces constatations, on peut supposer que Ω est le troisième paramètre pertinent vis-à-vis du comportement de notre matériau d'étude. Son influence sur la réponse du modèle, présentée sur la FIGURE V.2(b), va dans le sens de l'évolution de la dissipation globale avec la fatigue.

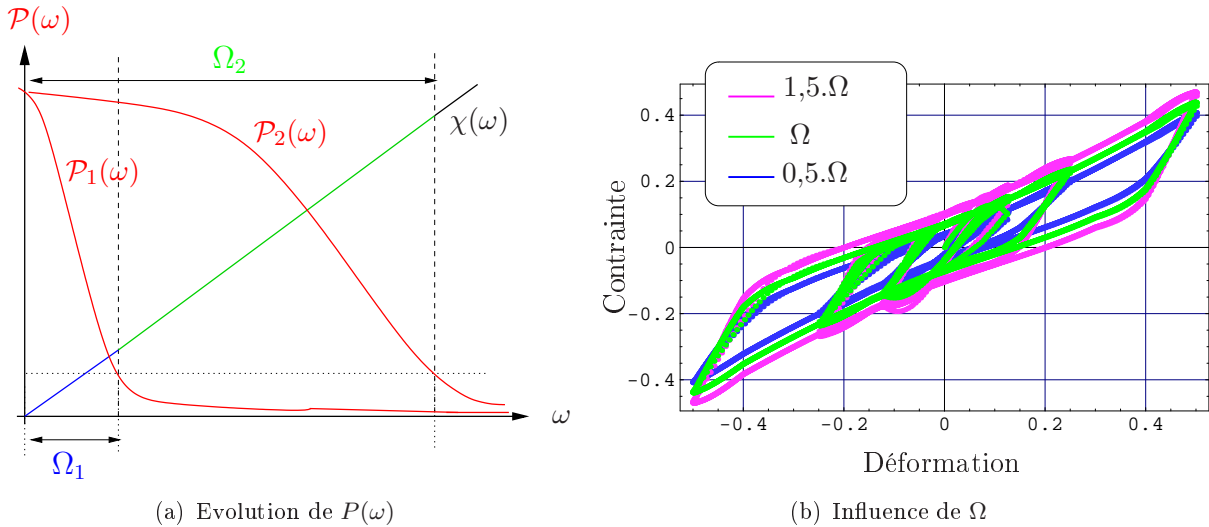


FIGURE V.2 – Evolution de la fonction de pondération $P(\omega)$ et Influence du paramètre Ω sur la réponse globale du modèle SHVP1_PT.

Ainsi la modélisation de l'endommagement va nécessiter la ré-identification des paramètres C_1 , C_2 et Ω pour les différentes configurations de fatigue.

REMARQUE V.1

Nous avons supposé, suite aux identifications, que le rapport $\frac{C_1}{C_2}$ était constant au cours de la fatigue, ce qui conduit à l'identification d'un seul des deux paramètres, en l'occurrence C_1 . Cette hypothèse est tout à fait en accord avec la théorie de l'endommagement continue de LEMAITRE et CHABOCHE [1985]. □

V.1.2 Identification des paramètres du modèle SHVP1_PT avec la fatigue

La forme des éprouvettes de double cisaillement, ainsi que la nature des essais ont induit une localisation de l'endommagement au voisinage des ménisques. Cette localisation entraîne une non-homogénéité du comportement dans les éprouvettes et par conséquent, l'impossibilité d'identifier directement des paramètres matériaux.

L'identification des deux paramètres caractéristiques de l'endommagement, C_1 (respectivement C_2) et Ω , a donc été réalisée sur les essais de **traction**. À partir des courbes expérimentales, obtenues après différentes étapes de fatigue en traction, nous avons ré-identifié ces deux paramètres.

Nous présentons dans le TABLEAU V.1, les valeurs des paramètres obtenus.

| | | C1 (Mpa) | Ω | Erreur (%) |
|------|--------|----------|----------------|------------|
| | 10 | 1,28 | $3,11.10^{-2}$ | 11 |
| | 1000 | 1,31 | $2,9.10^{-2}$ | 9,8 |
| 25% | 10000 | 1,37 | $2,85.10^{-2}$ | 9,1 |
| | 40000 | 1,29 | $2,76.10^{-2}$ | 10,8 |
| | 100000 | 1,23 | $2,71.10^{-2}$ | 9,8 |
| | 10 | 1.24 | $3,11.10^{-2}$ | 15 |
| | 1000 | 1,28 | $3,11.10^{-2}$ | 11 |
| 50% | 10000 | 1,41 | $2,9.10^{-2}$ | 8,3 |
| | 40000 | 1,33 | $2,3.10^{-2}$ | 6,6 |
| | 10 | 1,28 | $3,11.10^{-2}$ | 12.2 |
| | 1000 | 1,31 | $3,11.10^{-2}$ | 11 |
| 100% | 10000 | 1,26 | $2,5.10^{-2}$ | 9,1 |
| | 40000 | 0.96 | $1,9.10^{-2}$ | 10.2 |
| | 10 | 1,28 | $3,11.10^{-2}$ | 12 |
| 150% | 1000 | 1,31 | $3,11.10^{-2}$ | 9.4 |
| | 10000 | 1,15 | 2.10^{-2} | 10.5 |

TABLEAU V.1 – Paramètres du modèles SHVP1_PT après des essais de fatigue à $50\% \pm 50\%$

Les FIGURES V.3, V.4, V.5 donnent la comparaison entre les réponses du modèle SHVP1_PT et les courbes expérimentales pour quelques niveaux de fatigue.

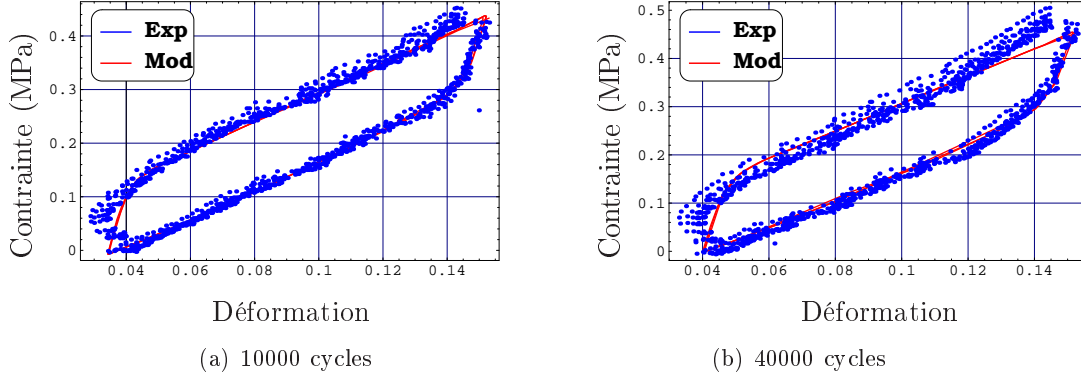


FIGURE V.3 – Comparaison modèle/expérience pour différents niveaux de fatigue à $50\% \pm 50\%$.

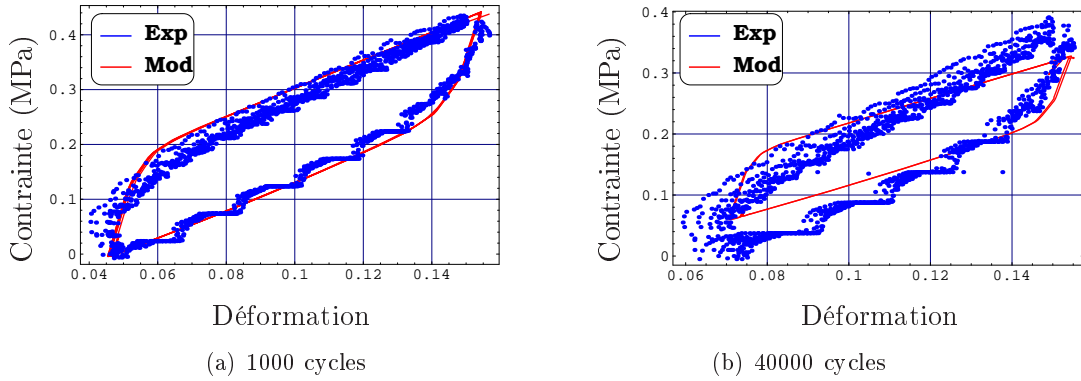


FIGURE V.4 – Comparaison modèle/expérience pour différents niveaux de fatigue à $100\% \pm 100\%$.

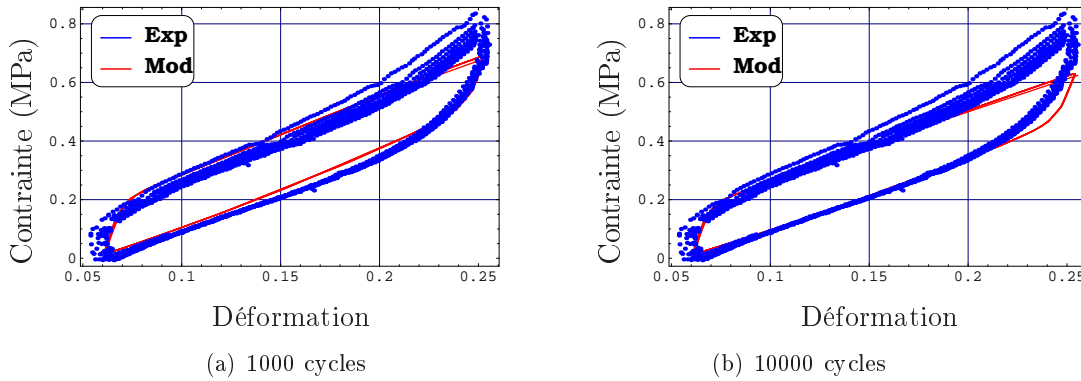


FIGURE V.5 – Comparaison modèle/expérience pour différents niveaux de fatigue à $150\% \pm 150\%$.

V.2 Proposition d'un modèle d'endommagement en fatigue

V.2.1 Hypothèses et définitions

À partir de l'évolution des paramètres C_1 et Ω avec la fatigue, nous tentons de modéliser l'évolution de l'endommagement. Plusieurs hypothèses sont faites :

- L'endommagement de l'élastomère est isotrope
- Il est supposé être la combinaison :
 - d'un endommagement de la matrice,
 - d'une réduction des seuils de glissements aux interfaces charge/matrice.
- Ces deux endommagements sont respectivement associés aux contraintes $\bar{\sigma}_m$ et $\tilde{\tilde{\sigma}}(\omega)$ (cf. FIGURE V.6),
- On fait l'hypothèse d'un cumul linéaire de l'endommagement (LEMAITRE et CHABOCHE [1985]).

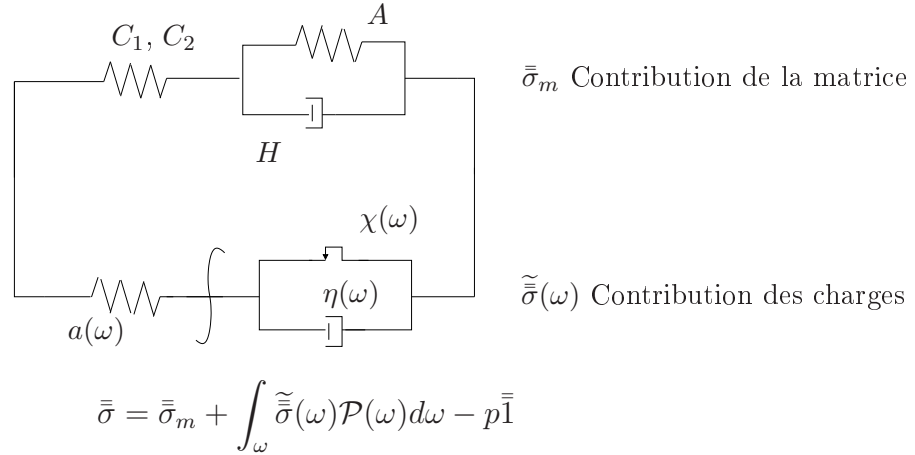


FIGURE V.6 – Rappel du modèle SHVP1_PT

• Endommagement de la branche microscopique

Cet endommagement peut être interprété comme la réduction du spectre de seuils de glissement, au niveau de l'interface pour différentes populations de charge. Il correspond à une chute "statistique" de ces seuils. Ainsi, on définit une variable d'endommagement microscopique d telle que :

$$d = 1 - \frac{\Omega}{\Omega^o} \quad (\text{V.1})$$

Ω^o correspond au comportement non endommagé.

• Endommagement de la branche macroscopique

C'est l'endommagement associé à la matrice. Pour un cycle stabilisé, on définit alors une variable d'endommagement macroscopique D de la forme suivante :

$$D = 1 - \frac{\Delta\sigma_m}{\Delta\sigma_m^o} \quad (\text{V.2})$$

où $\Delta\sigma_m^o$ est la variation de contrainte matricielle lors d'un cycle stabilisé non endommagé.

V.2.2 Analyse des évolutions

Nous présentons sur les FIGURES V.7, l'évolution de d en fonction du nombre de cycle, pour les quatre configurations d'essais de fatigue. L'endommagement à l'interface semblent apparaître dès les premiers cycles.

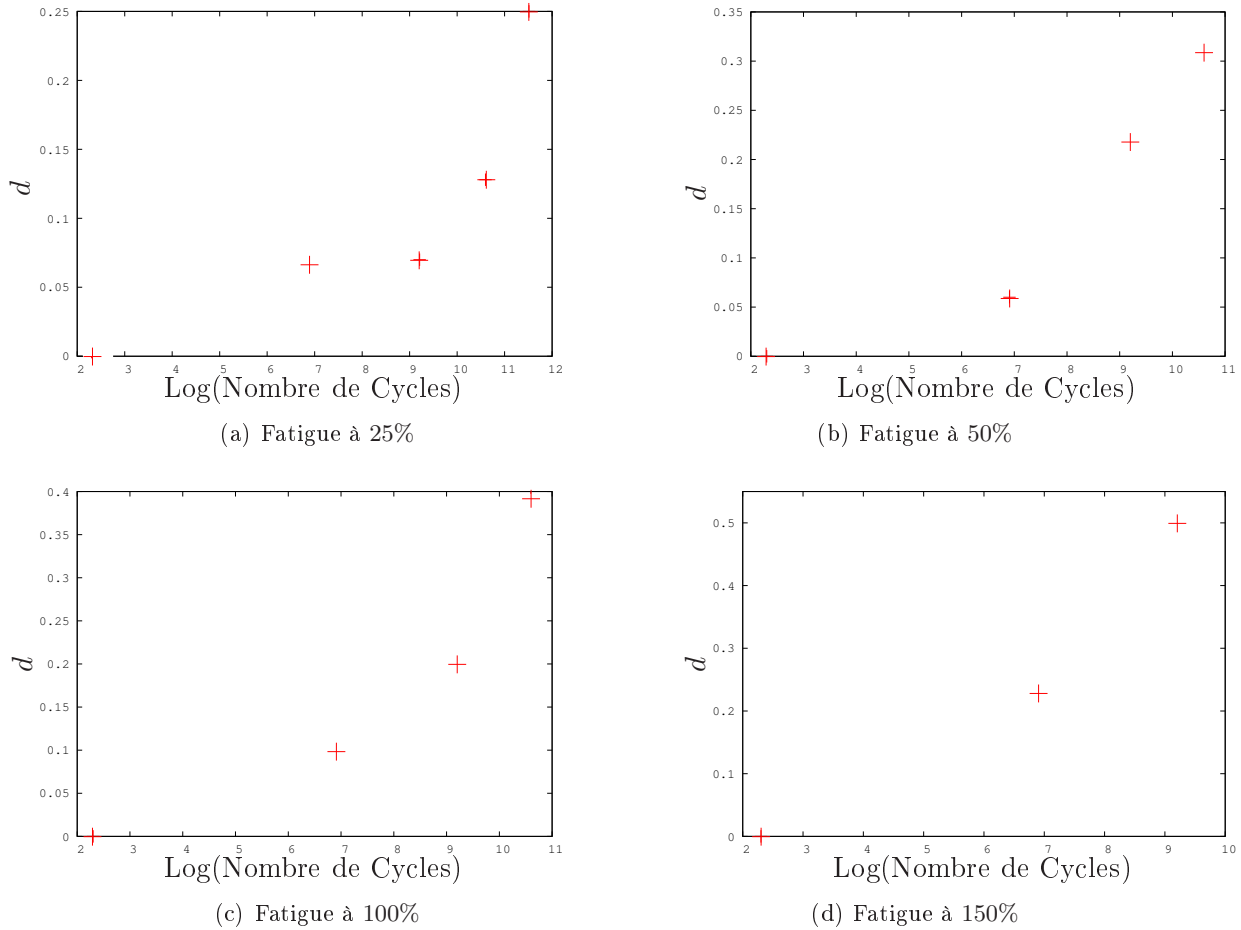
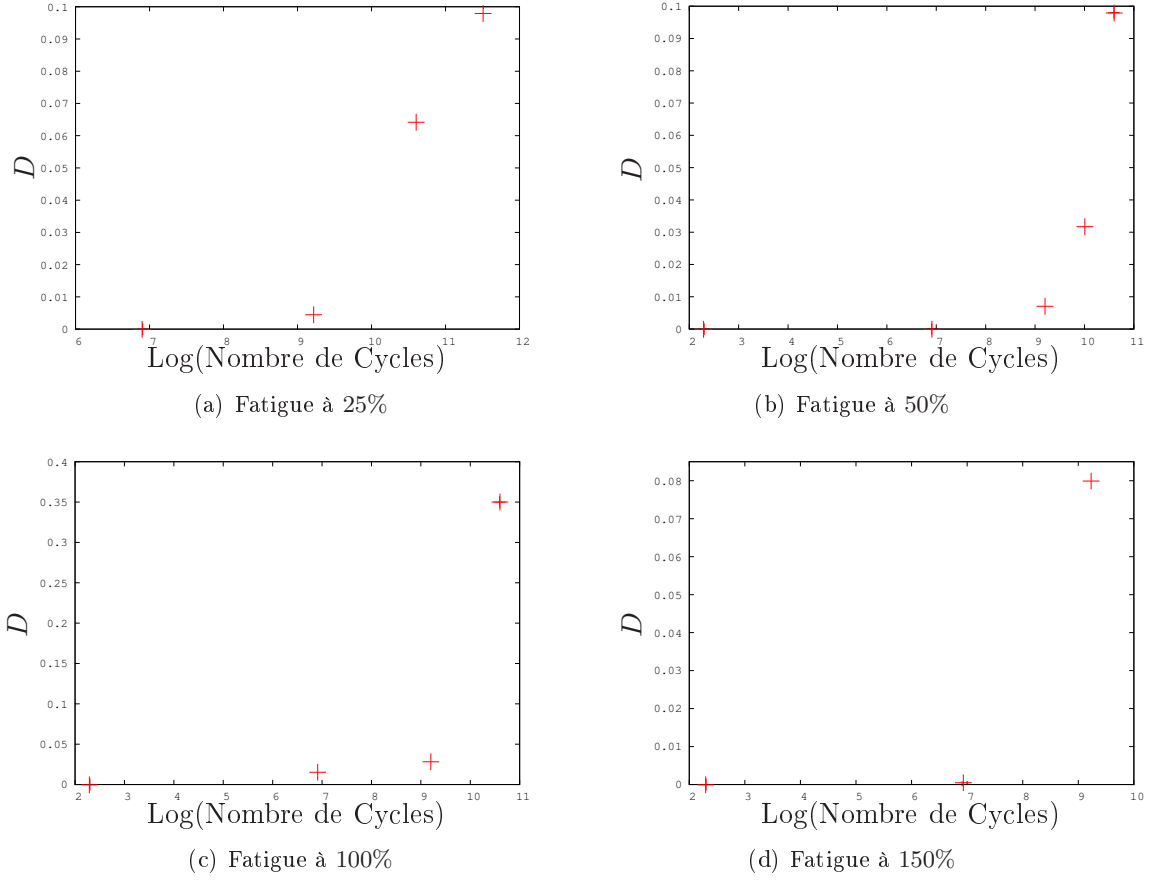


FIGURE V.7 – Evolution de l'endommagement microscopique d

Pour la matrice, on observe sur les courbes V.8, qui présentent l'évolution de l'endommagement macroscopique en fonction du nombre de cycles, un plateau de comportement stabilisé ($D \approx 0$), suivi d'une croissance rapide de l'endommagement.

FIGURE V.8 – *Evolution de l'endommagement macroscopique D*

À travers ces évolutions, on peut esquisser un mécanisme d'endommagement qui paraît compatible avec la nature micro-structurale de ces matériaux.

Ainsi, le dommage s'initie, dès les premiers cycles, au niveaux des interfaces charges/matrice (évolution de d avec $D \approx 0$). Cet endommagement se propage ensuite au sein de la matrice avec l'augmentation des nombres de cycles.

V.2.3 Écriture des lois d'évolution des endommagements

Ainsi, deux nouvelles variables d et D sont définies pour décrire l'endommagement du modèle SHVP1_PT. Nous supposons alors une séparation des variables liées à l'endommagement et au chargement, ce qui conduit vers des modèles d'endommagement dit à "cumul linéaire" (LEMAITRE et CHABOCHE [1985]). L'écriture des lois d'évolution va passer par le postulat des deux formes d'évolution de l'endommagement suivantes :

$$\frac{\delta d}{\delta N} = g(R_\mu, d) \quad (\text{V.3})$$

$$\frac{\delta D}{\delta N} = f(R_M, D, d) \quad (\text{V.4})$$

R_M et R_μ sont assimilables à des énergies cycliques **restituables**, qui se présentent comme la différence, au cour d'un cycle stabilisé, entre l'énergie reçue ϖ et la dissipation cyclique ϕ :

$$R = \int_0^T |\varpi - \phi| dt = \int_0^T |\rho \dot{\psi}| dt \quad (\text{V.5})$$

Ceci entraîne, pour la branche matricielle :

$$\begin{aligned} R_M &= \int_0^T \left| \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{D}} - \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\bar{D}}_o^v} : \bar{\bar{D}}_o^v \right| dt \\ &= \int_0^T |\rho \dot{\psi}_e + \rho \dot{\psi}_v| dt \end{aligned} \quad (\text{V.6})$$

et pour la branche statistique :

$$\begin{aligned} r_\mu(\omega) &= \int_0^T \left| \left(\tilde{\bar{\sigma}}(t, \omega) : \bar{\bar{D}}(t) - \frac{\partial \tilde{\varphi}(t, \omega)}{\partial \bar{\bar{D}}_o^p(t, \omega)} : \bar{\bar{D}}_o^p(t, \omega) \right) \right| dt = \int_0^T |\rho \dot{\tilde{\psi}}(t, \omega)| dt \\ R_\mu &= \int_0^\infty r_\mu(\omega) d\omega \end{aligned}$$

REMARQUE V.2

MARS [2002] présente une comparaison de quatre critères : la densité d'énergie de déformation, la densité d'énergie de fissuration, la déformation principale maximale et la déformation de cisaillement octaédrique. Il semble, dans son cas, que les critères en déformation soient les plus perspicaces.

Notre choix de R permet, cependant, de prendre en compte toute l'énergie qui rentre en jeu au cours d'un cycle et présente l'intérêt de traduire, dans le bon sens, les influences respectives des minimums et maximums des déformations au cour d'un cycle. De plus, la prise en compte d'un critère en R nécessite moins de paramètres que les critères en déformations (qui dépendent de σ_{min} , σ_{max} ...), ce qui entraîne un coût moindre en terme d'identification. \square

• Loi d'évolution de l'endommagement microscopique

À partir des jeux de paramètres identifiés sur les essais fatigués et après ajustement des réponses du modèle avec les courbes V.7 et V.8, grâce au logiciel MATHEMATICA[®], nous avons étudié l'évolution des deux endommagements d et D .

L'ajustement de la forme logarithmique de l'évolution de l'endommagement microscopique ($\text{Ln}(\frac{\delta d}{\delta N})$) est effectuée en deux étapes, via une méthode de régression linéaire, d'abord en fonction de $\text{Ln}(d)$, présentée sur la FIGURE V.9, puis de $\text{Ln}(R_\mu)$.

Directement à partir de la régression linéaire, présentée sur la FIGURE V.9, on peut décrire l'évolution de l'endommagement d par :

$$\text{Ln}\left(\frac{\delta d}{\delta N}\right) = \alpha \text{Ln}(d) + h(R_\mu) \quad (\text{V.7})$$

où la fonction $h(R_\mu)$, tracée sur la FIGURE V.10, est traduite par une fonction linéaire.

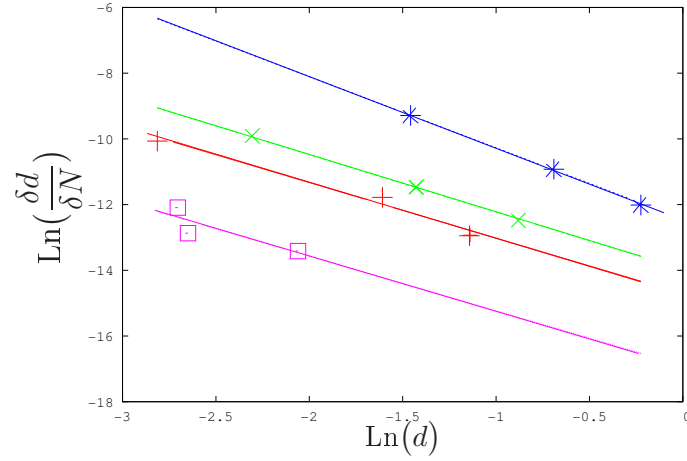


FIGURE V.9 – Evolution de $\text{Ln}(\frac{\delta d}{\delta N})$ en fonction de $\text{Ln}(d)$ pour les différentes configurations (\square : après fatigue à $\pm 25\%$, $+$: après fatigue à $\pm 50\%$, \times : après fatigue à $\pm 100\%$, $*$: après fatigue à $\pm 150\%$).

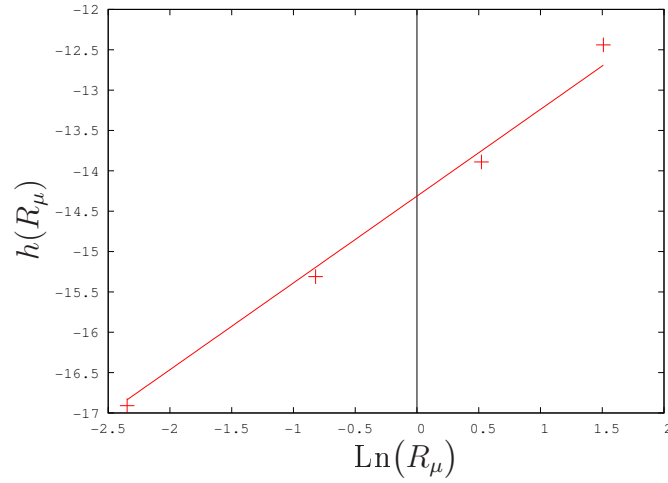


FIGURE V.10 – Evolution de $h(R_\mu)$ en fonction de $\text{Ln}(R_\mu)$.

On peut alors décrire l'évolution de d par la loi suivante :

$$\text{Ln}\left(\frac{\delta d}{\delta N}\right) = \alpha \text{Ln}(d) + \beta \text{Ln}\left(\frac{R_\mu}{R_\mu^o}\right) \quad (\text{V.8})$$

que l'on préfère utiliser sous la forme :

$$\boxed{\frac{\delta d}{\delta N} = d^\alpha \left(\frac{R_\mu}{R_\mu^o}\right)^\beta}$$

Ainsi, en intégrant cette équation, pour un nombre de cycles N , on arrive à la forme de l'endommagement microscopique suivant :

$$d = \left[(1 - \alpha) N \left(\frac{R_\mu}{R_\mu^o} \right)^\beta \right]^{\frac{1}{1 - \alpha}} \quad (\text{V.9})$$

avec

$$\begin{cases} \alpha = 1.84 \\ \beta = 1.075 \\ R_\mu^o = 2,81.10^5 \end{cases}$$

• Loi d'évolution de l'endommagement macroscopique

On a pu constater, sur les FIGURES V.7 et V.8, que l'endommagement macroscopique démarre de façon différée par rapport à l'endommagement microscopique, soit :

- entre 1000 et 10000 cycles pour les essais fatigués à $\pm 25\%$ et $\pm 50\%$
- entre 10 et 1000 cycles pour ceux fatigués à $\pm 100\%$ et $\pm 150\%$.

Les résultats expérimentaux que nous possédons pour le moment, ne nous permettent pas de définir plus précisément les intervalles d'initiation.

Cependant, nous proposons de prendre en compte ce décalage entre les deux endommagements, via une variable seuil d^o , à partir de laquelle la propagation de l'endommagement s'effectue entre les interfaces et la matrice. Cette valeur est calculée à partir d'une moyenne des d , sur le plus petit intervalle d'initiation de l'endommagement macroscopique commun à toutes les configurations.

Ainsi, si $d < d^o$ alors $\frac{\delta D}{\delta N} = 0$ et si $d \geq d^o$ alors $\frac{\delta D}{\delta N} = f(R_M, D)$.

Nous optons donc pour la forme :

$$\frac{\delta D}{\delta N} = H(d - d^o) f(R_M, D) \quad (\text{V.10})$$

où $H(x)$ est nulle si $x < 0$ et égale à 1 si $x \geq 0$.

L'identification de cette loi s'effectue de façon identique à celle effectuée pour l'endommagement microscopique. On obtient, pour la fonction f , les régressions linéaires présentées sur les FIGURES V.11 et V.12, en notant :

$$\text{Ln}\left(\frac{\delta D}{\delta N}\right) = A \text{Ln}(D) + g(R_M) \quad (\text{V.11})$$

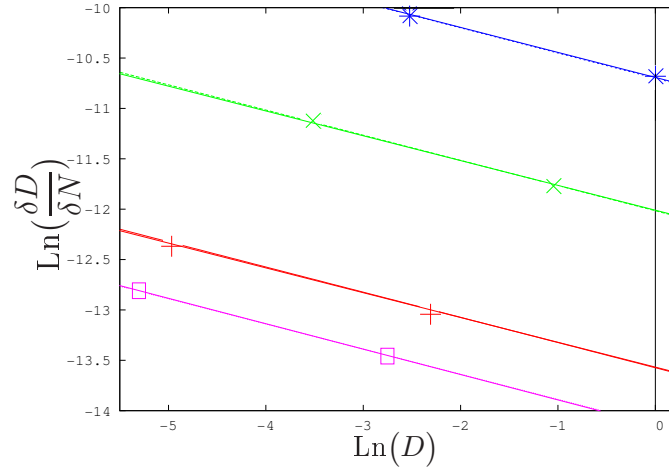


FIGURE V.11 – Evolution de $\text{Ln}(\frac{\delta d}{\delta N})$ en fonction de $\text{Ln}(d)$ pour les différentes configurations (\square : après fatigue à $\pm 25\%$, $+$: après fatigue à $\pm 50\%$, \times : après fatigue à $\pm 100\%$, $*$: après fatigue à $\pm 150\%$).

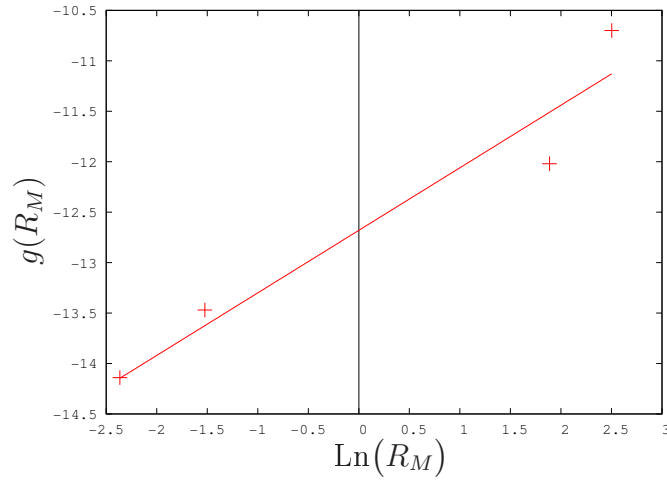


FIGURE V.12 – Evolution de $g(R_M)$ en fonction de $\text{Ln}(R_M)$.

L'évolution linéaire de la fonction $g(R_M)$ va permettre de décrire l'évolution de l'endommagement macroscopique en fonction de D , R_M et du seuil d^o , telle que :

$$\frac{\delta D}{\delta N} = H(d - d^o) D^A \left(\frac{R_M}{R_M^o} \right)^B \quad (\text{V.12})$$

Ainsi, en intégrant l'équation V.12, on arrive à la forme de l'endommagement macroscopique de l'équation V.13 :

$$D = H(d - d^o) \left((1 - A) N \left(\frac{R_M}{R_M^o} \right)^B \right)^{\frac{1}{1-A}} \quad (\text{V.13})$$

avec $A = -0.25$, $B = 0.62$, $d^o = 0.085$ et $R_M^o = 7.74.10^8$.

REMARQUE V.3

On note ici que si l'on prend $B = 1$, on se ramène à un modèle incrémental qui pourrait rendre le modèle d'endommagement indépendant de la notion de cycle. \square

V.3 Vers une modélisation éléments finis du modèles endommageable

Le modèle de comportement endommageable ainsi fixé, nous allons dans ce paragraphe le valider en l'implémentant dans un code de calcul d'éléments finis développé au sein de l'équipe Modèle Numérique du LMA. Nous donnons dans une première partie les grandes lignes de cette implémentation numérique et pour conclure les résultats que nous avons obtenus.

V.3.1 Implémentation Éléments finis

|| **Avertissement** : ce travail a fait l'objet d'une collaboration avec A. BOUKAMEL et S. LEJEUNES et donnera lieu à une publication qui est actuellement en cours de rédaction.

V.3.1.a Formulation variationnelle

Le modèle de comportement a été implémenté en C++, dans le code d'éléments finis orienté objets ZeBuloN, dont l'architecture a été développée à l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Pour tenir compte du caractère quasi-incompressible du matériau, la décomposition du gradient $\bar{\bar{F}} = J^{\frac{1}{3}} \underline{\bar{F}}$ est utilisée, l'énergie libre spécifique peut alors être découpée en une partie isochorique et une partie volumique :

$$\psi = \underline{\psi} + \psi_{vol}(J) \quad (\text{V.14})$$

Par ailleurs, le gradient incompressible $\underline{\bar{F}}$ est décomposé, en utilisant le concept de l'état intermédiaire SIDOROFF [1973], en une partie élastique et une partie anélastique :

$$\underline{\bar{F}} = \underline{\bar{F}}_e \cdot \underline{\bar{F}}_a. \quad (\text{V.15})$$

Pour notre problème, la formulation variationnelle du problème d'équilibre quasi compressible correspond à une formulation en lagrangien perturbé, introduisant un multiplicateur de Lagrange, qui correspond à la pression hydrostatique p . La solution $(\mathbf{u}; p)$ annule ainsi la forme intégrale suivante pour toutes les fonctions tests $\delta \mathbf{v}$ et δq choisies respectivement dans les mêmes espaces que les champs inconnus⁽¹⁾ \mathbf{u} et p :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\pi} : \nabla \delta \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{ext} d\Omega - \int_{\delta \Omega} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_{ext} dS \\ \int_{\Omega_0} \left(-(J(\mathbf{u}) - 1) - \frac{1}{k} p \right) \delta q d\Omega \end{cases} \quad (\text{V.16})$$

où $\boldsymbol{\pi} = J \bar{\sigma} \bar{F}^{-T}$ est le premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff, avec $\bar{\sigma} = \sigma_0^D + \int_{\omega} \bar{\sigma}^D P(\omega) d\omega + \bar{\sigma}_{vol}$ et $\bar{\sigma}_{vol} = \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \bar{1}$.

La résolution de ce système non-linéaire et instationnaire nécessite à la fois la mise en oeuvre d'un schéma incrémental en temps et d'un l'algorithme de résolution de type NEWTON-RAPHSON. Pour ce dernier point, le calcul de l'opérateur tangent $\bar{\bar{T}}$ est nécessaire :

$$\bar{\bar{T}} = \frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial \bar{F}} = \bar{\bar{T}}_0 + \bar{\bar{T}}_{stat} = \bar{\bar{T}}_0 + \int_0^\infty \bar{\bar{T}}(\omega) P(\omega) d\omega \quad (\text{V.17})$$

$$\text{avec } \begin{cases} \bar{\bar{T}}_0 = \frac{\partial J(\bar{\sigma}_0^D + \bar{\sigma}_{vol}) \cdot \bar{F}^{-T}}{\partial \bar{F}} \\ \bar{\bar{T}}(\omega) = \frac{\partial J \bar{\sigma}^D(\omega) \cdot \bar{F}^{-T}}{\partial \bar{F}} \end{cases}$$

V.3.1.b Intégration du comportement matriciel

L'intégration du comportement matriciel se fait selon le comportement adopté pour la matrice :

- dans le cas d'un comportement hyper-élastique (modèle SHVP1), $\bar{\pi}_0$ est déterminé à chaque intervalle de NEWTON-RAPHSON.
- dans le cas d'un comportement hyper-visco-élastique (modèle SHVP1_PT), à chaque incrément de temps et pour chaque itération de NEWTON-RAPHSON, un schéma d'intégration locale est mis en oeuvre.

V.3.1.c Intégration du comportement statistique

Classiquement, pour résoudre un problème spatio-temporel, deux discrétisations sont nécessaires : une discrétisation géométrique (par éléments finis) et une discrétisation temporelle (un schéma d'Euler associé à l'algorithme de Newton-Raphson, par exemple).

(1). \mathbf{f}_{ext} et \mathbf{F}_{ext} désignent respectivement les forces volumiques et surfaciques extérieures.

Dans notre cas, pour évaluer $\bar{\bar{T}}_{stat}$ une troisième discrétisation sur la variable ω , s'avère nécessaire. Cette discrétisation statistique, proposée par l'équation V.18 est couplée à une méthode d'intégration de type trapèzes.

$$\bar{\bar{T}}_{stat} = \int_0^\infty \frac{\partial J_{\bar{\bar{\sigma}}}^D(\omega) \cdot \bar{\bar{F}}^{-T}}{\partial \bar{\bar{F}}} P(\omega) d\omega = \sum_{i=1}^n \overbrace{\frac{\partial J_{\bar{\bar{\sigma}}}^D(\omega_i) \cdot \bar{\bar{F}}^{-T}}{\partial \bar{\bar{F}}}}^{\mathcal{T}_{stat}^i} P(\omega_i) \Delta\omega_i \quad (\text{V.18})$$

L'intégration de la loi hyper-élasto-visco-plastique est réalisée *via* un algorithme de type retour radial, basé sur une prédiction hyper-élastique, puis sur une correction plastique (cf SIMO [1998]).

Ainsi, si $\|\bar{\bar{\sigma}}_i^{n+1}\| \leq \chi$ la prédiction est juste, sinon on utilise un algorithme inspiré de l'algorithme de retour radial pour calculer les nouvelles grandeurs.

La même démarche est adaptée pour le calcul de l'opérateur tangent.

V.3.1.d Intégration des lois d'endommagement

L'implémentation des lois d'endommagement nécessite deux étapes :

1. On simule les premiers cycles d'un essai de fatigue. Cette étape de post-traitement permet le calcul de R_μ et R_M à partir des cycles stabilisés, sous les formes discrétisées suivantes :

$$\begin{cases} R_M = \int_0^T |\rho \dot{\psi}_M| dt \approx \sum_n |\psi_M(\bar{\bar{F}}^{n+1}) - \psi_M(\bar{\bar{F}}^n)| \\ R_\mu \approx \sum_{\omega_i} \left(\sum_n |\tilde{\psi}(\omega_i, \bar{\bar{F}}^{n+1}) - \tilde{\psi}(\omega_i, \bar{\bar{F}}^n)| \right) \mathcal{P}(\omega_i) \Delta\omega \end{cases} \quad (\text{V.19})$$

2. On simule les essais de caractérisation, pour n'importe quel nombre de nombre de cycles en utilisant les valeurs de R_μ et R_M calculés dans la première étape et en évaluant l'évolution de D et d .

V.3.2 Simulations numériques des essais de double-cisaillement, en vue d'une validation du modèle d'endommagement

Nous allons dans ce paragraphe présenter une démarche de validation de ce modèle à travers :

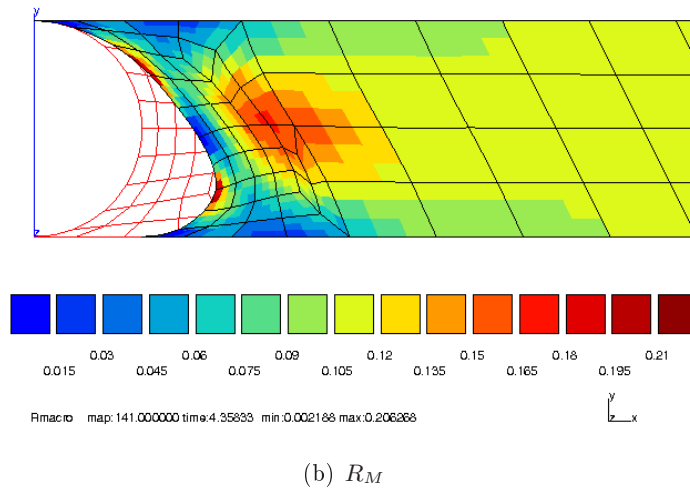
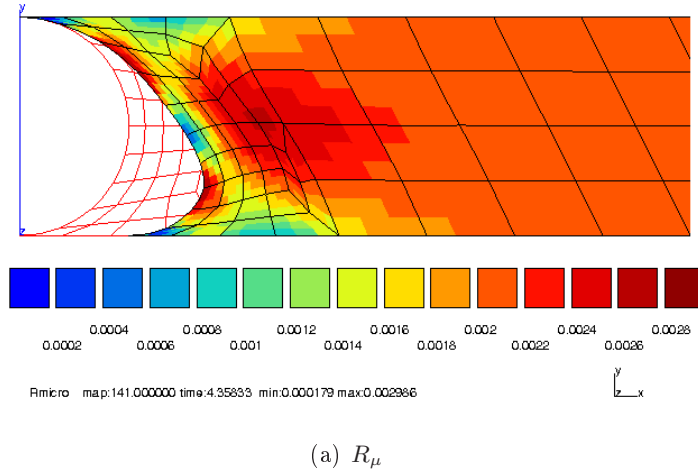
- la simulation Elément Finis d'un essai de fatigue en double cisaillement,
- l'évaluation locale des champs d'endommagement macroscopique et d'interface,
- la prévision du comportement après N cycles de fatigue,
- la confrontation des résultats de cette prévision avec les résultats expérimentaux obtenus lors de la campagne d'essais de double cisaillement.

Dans un premier temps, nous avons simulé 3 cycles d'un essai sinusoïdal à 25% d'amplitude de déformation et à 6Hz (une des configurations de fatigue). La simulation a été réalisée en supposant le comportement des armatures des éprouvettes DC infiniment rigide par rapport au comportement de l'élastomère. De plus, la symmétrie de l'éprouvette par rapport à son armature centrale nous a amené à ne modéliser qu'une des deux lamelles d'élastomère. Nous présentons sur la FIGURE V.13, la géométrie de l'éprouvette.



FIGURE V.13 – Géométrie de l'éprouvette simulée

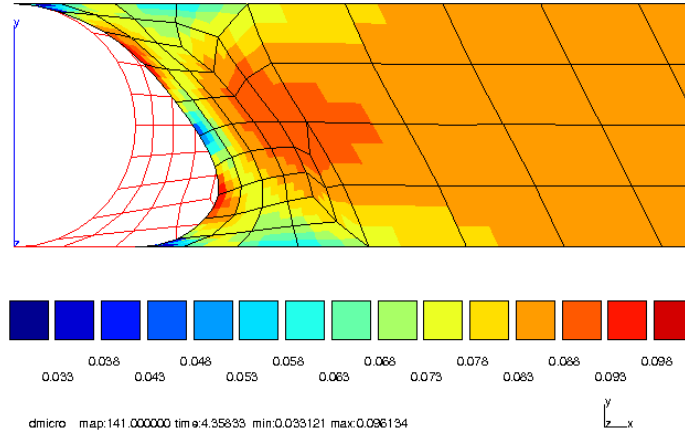
À partir de cette première simulation, une étude de post-traitement sur le dernier cycle nous permet de déterminer les cartes des grandeurs R_μ et R_M , respectivement présentées sur la FIGURE V.14(a) et FIGURE V.14(b).

FIGURE V.14 – Répartition des grandeurs R_μ et R_M dans l'éprouvette DC

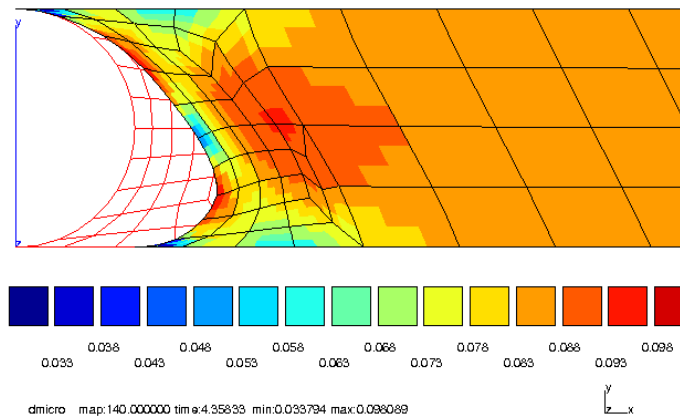
Ces champs R_μ et R_M , nous permettent de calculer les cartes des champs d'endommagements microscopique d et macroscopique D pour n'importe quel nombre de cycles. Nous présentons la répartition des variables d et D après 170000 et 180000 cycles.

Il apparaît alors une répartition faiblement localisée de l'endommagement microscopique (*cf.* FIGURES V.15), qui évolue doucement au cours des cycles. Nous interprétons cette uniformité par une distribution homogène des décohésions entre les charges et la matrice.

L'endommagement macroscopique est, quant à lui, plus localisé. Cette localisation apparaît d'abord autour du ménisque (*cf.* FIGURE V.16(a)), puis se diffuse le long de l'éprouvette au cours des cycles, tel que le montre la *cf.* FIGURE V.16(b). Nous notons que les échelles de couleurs choisies sont les mêmes pour les résultats à 170000 et 180000 cycles.

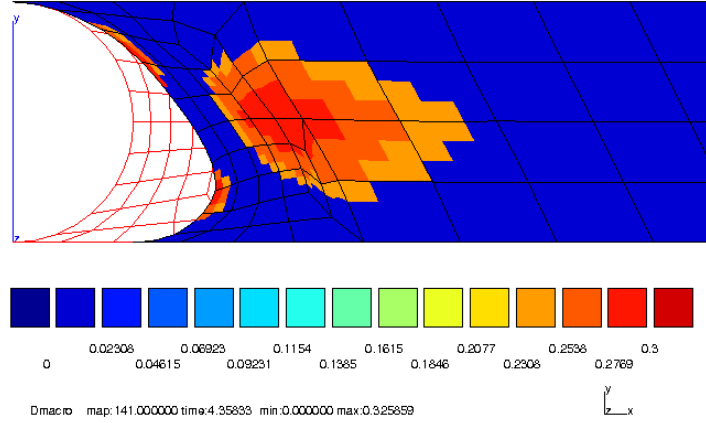


(a) 170000 cycles

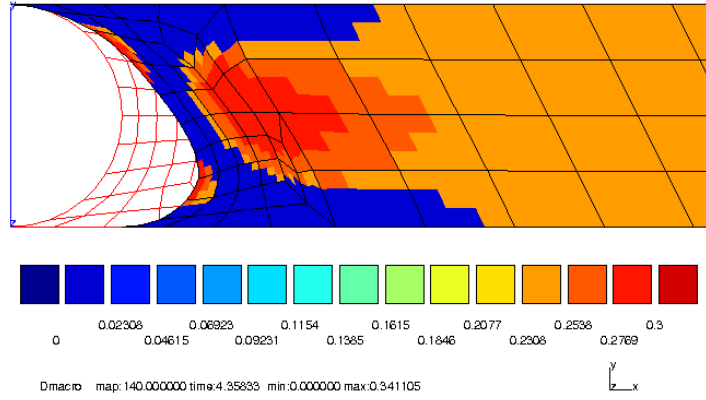


(b) 180000 cycles

FIGURE V.15 – Répartition de l'endommagement microscopique d dans l'éprouvette DC



(a) 170000 cycles



(b) 180000 cycles

FIGURE V.16 – Répartition de l'endommagement macroscopique D dans l'éprouvette DC

Finalement, pour comparer le comportement global de la simulation aux réponses expérimentales, un essai triangulaire à $1s^{-1}$ à amplitude de déformation maximale de 50% (*cf.* FIGURE V.17) a été simulé pour un matériau, préalablement fatigué à 170000 et 180000 cycles. Les résultats obtenus par le calcul E.F., *cf.* FIGURE V.17, sont, alors très proches des résultats expérimentaux. On observe effectivement la perte de raideur ainsi que la diminution de la dissipation attendue, pour les bons nombres de cycles. Ces résultats permettent, ainsi, de confronter la réponse du modèle, obtenu après identification de l'endommagement sur des essais en traction, à des essais de cisaillement.

Les premiers résultats de la simulation EF obtenus, donnent des résultats largement satisfaisants sur cet essai. D'autres simulations devront être réalisée.

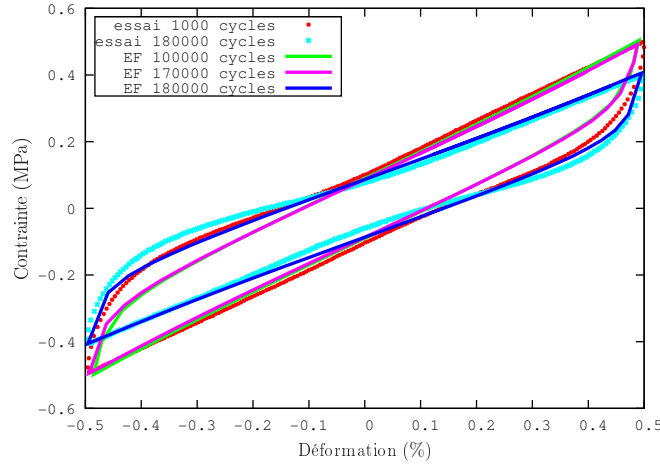


FIGURE V.17 – *Comparaison entre courbes expérimentale et simulation EF de plusieurs cycles à 50% de déformation*

V.4 Conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre les lois d'endommagement régissant le comportement de l'élastomère VHDS E1029. À travers une étude des paramètres du modèle SHVP1_PT, il semble que les mécanismes globaux d'endommagement (perte de raideur et de dissipation) puissent être interprétés par l'évolution de trois paramètres $C1$ (respectivement $C2$) et Ω . Ainsi, après ré-identification de ces paramètres sur des essais de traction, deux variables d'endommagement scalaires ont été introduites : D pour la partie matricielle, et d liée à la branche statistique, ainsi que leur loi d'évolution, fonction des grandeurs R_M et R_μ représentant les énergies mises en jeu au cours d'un cycle.

Une fois ces deux lois définies, une simulation EF sur un code de calcul a été réalisée. L'objectif de cette simulation était de valider les lois d'endommagement développées à partir des essais de traction, en retrouvant les évolutions des courbes expérimentales obtenues après fatigue dans le cas du cisaillement. Les premiers résultats que nous avons obtenus présentent une bonne concordance avec les courbes expérimentales. La visualisation des répartitions des endommagements le long de l'éprouvette montre une forte localisation de l'endommagement macroscopique avec une répartition plus homogène de d .

Ces simulations EF confortent donc les développements réalisés dans cette thèse. La méthode mis en oeuvre pour obtenir les lois d'évolutions devra être affinée sur d'autres essais de traction afin de valider ces lois sur d'autres configurations d'essais.

Conclusion et perspectives

Les travaux que nous avons réalisés dans cette thèse regroupent différents aspects de la mécanique qui ont permis de développer des modèles de comportement hyper-visco-élasto-plastique incompressible d'un élastomère chargé, intégrant des lois d'évolution d'endommagement basées à la fois sur des observations microscopiques et sur des constatations phénoménologiques.

À partir d'observations microscopiques sur des éprouvettes fatiguées, nous avons mis en évidence l'apparition et l'évolution de cavitations au niveau des interfaces entre charges et matrice. Ces constatations microscopiques nous ont poussé à décrire un modèle de comportement qui tienne compte de ces mécanismes. En s'inspirant des travaux de MEO [2000], MARTINEZ [2005] et BOUKAMEL [2006], nous avons développé deux modèles de comportement statistiques, micro-physiquement motivés, qui diffèrent uniquement par le comportement assigné à la matrice (hyper-élastique ou hyper-visco-élastique) et qui tiennent compte des diverses populations de charges et de leur interface, via des branches statistiques. Les paramètres caractéristiques des deux modèles, respectivement notés SHVP1 et SHVP1_PT, sont identifiés sur des courbes expérimentales de cisaillement et validés sur des réponses en traction. À ce stade, nous avons défini deux modèles de comportement micro-physiquement motivés, qui prennent en compte la microstructure du matériau et qui donnent de très bons résultats, sur des plages de fréquences et de déformations assez larges.

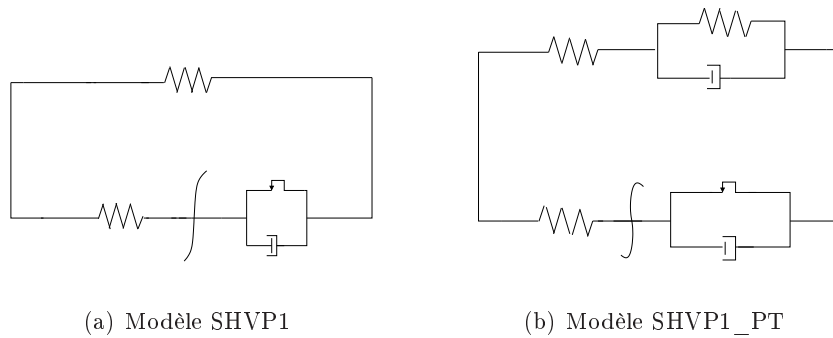


FIGURE 1 – *Modèles de comportement statistiques SHVP1 et SHVP1_PT.*

Afin de caractériser l'influence de l'endommagement par fatigue sur le comportement global de l'élastomère, nous avons réalisé deux campagnes d'essais de fatigue, l'une en traction, l'autre en cisaillement. Ces deux campagnes ont suivi la même méthodologie, qui à notre connaissance est originale :

1. Les éprouvettes sont d'abord soumises à des essais cycliques, pour différentes configurations (fréquences et amplitudes de déformation) et à plusieurs étapes de fatigue (nombres de cycles).
2. Après chaque étape de fatigue et pour toutes les configurations d'essais, les éprouvettes subissent différents essais de caractérisation. Ces essais nous permettent de caractériser l'évolution des paramètres des modèles, vis-à-vis de la fatigue.

L'étude des courbes expérimentales, réalisée pour chaque niveau de fatigue en traction et en compression, a permis de mettre très nettement en évidence deux mécanismes macroscopiques engendrés par l'endommagement en fatigue : un **assouplissement global** et une **diminution de la dissipation** du matériau.

À partir de l'étude paramétrique du modèle SHVP1_PT, nous avons mis en évidence l'influence prépondérante de deux paramètres sur l'évolution de la raideur et de la dissipation globale. La ré-identification de ces paramètres sur les courbes expérimentales de traction issues des essais de caractérisation pour chaque niveau de fatigue, a permis de distinguer deux modes d'endommagement du matériau :

- un endommagement d , dit microscopique, qui s'initie dès les premiers cycles et qui intervient au niveau des interfaces entre charges et matrice,
- un endommagement D , qualifié de matriciel, qui intervient de façon différée par rapport au premier, et qui semble être le fruit d'une propagation de l'endommagement microscopique vers la matrice.

En faisant l'hypothèse d'un endommagement isotrope et du cumul linéaire, nous avons développé deux lois d'évolution de l'endommagement en fatigue, basées sur un critère tenant compte des énergies mises en jeu au cours d'un cycle (défini par R_μ et R_M), et qui prennent les formes suivantes :

$$\begin{cases} d = \left[(1 - \alpha) N \left(\frac{R_\mu}{R_\mu^0} \right)^\beta \right] \frac{1}{1 - \alpha} \\ D = H(d - d^0) \left((1 - A) N \left(\frac{R_M}{R_M^0} \right)^B \right) \frac{1}{1 - A} \end{cases} \quad (1)$$

où α , β , R_μ^0 , A , B , d^0 et R_M^0 sont des paramètres matériaux.

Pour finir, nous avons validé ces lois d'endommagement via une simulation Element Finis à l'aide du code de calcul ZeBuloN, d'un essai de cisaillement après fatigue, sur une éprouvette de type DC. Les premiers résultats obtenus présentent de bonnes concordances avec les courbes expérimentales pour différents nombres de cycles. Ces résultats confortent l'ensemble des hypothèses que nous avons postulées pour décrire l'endommagement, ainsi que la méthodologie proposée ici.

Ainsi, les résultats que nous avons présentés dans cette thèse nous amènent à proposer quelques perspectives :

- La campagne expérimentale, bien qu'elle nous ait permis la caractérisation macroscopique de l'endommagement a soulevé quelques questions, qui nécessiteraient pour leur résolution, le développement de nouvelles campagnes expérimentales :
 - D'abord, l'utilisation d'éprouvettes de double cisaillement avec un élastomère à matrice silicone (à mauvaises propriétés d'adhésion) n'est pas la configuration optimale pour la caractérisation de la fatigue. L'endommagement, après s'être fortement localisé au niveau du ménisque, se propage de façon brutale vers l'interface élastomère/métal. Une campagne sur des éprouvettes "diabolos" devrait permettre l'évolution d'un endommagement plus diffus au sein du matériau.
 - Les essais de caractérisation ont présenté pour toutes les configurations, une rigidification du comportement avant l'assouplissement global, d'autant plus accentuée que les sollicitations sont élevées. Nous expliquons ce phénomène par un auto-échauffement des éprouvettes susceptible d'entraîner une réticulation des chaînes. Une campagne expérimentale d'essais thermiques et mécaniques devrait mieux nous éclairer sur ce phénomène.
 - Les essais de traction ont mis en avant l'apparition de déformations plastiques importantes. Une campagne expérimentale, regroupant les essais de fatigue et de caractérisation sur la même machine d'essais qui tienne compte de déformations résiduelles, pourrait donner des résultats certainement moins dispersifs et plus facilement exploitables.
- Des techniques de calculs, ciblées pour les comportements multi-échelles tels que l'homogénéisation ou la mécanique configurationnelle, intégrées aux modèles statistiques, permettraient de donner un sens plus physique aux paramètres des modèles de comportement, spécialement ceux assignés à la branche statistique.
- La simulation EF, proposé en fin de thèse, devra être appliquée à d'autres types d'essais expérimentaux afin de valider le modèle sur des larges plages de sollicitations.

BIBLIOGRAPHIE

- F. ABRAHAM, T. ALSHUTH et S. JERRAMS. The effect of minimum stress and stress amplitude on the fatigue life of non strain crystallising elastomers. *Materials and Design*, 26 : p. 239–245, 2005.
- T. ALSHUTH et F. ABRAHAM. Parameter dependence and prediction of fatigue properties of elastomer products. *Rubber Chemistry and Technology*, vol. 75 :p. 635–642, 2002.
- F. ANDRIEUX, K. SAANOUNI et F. SIDOROFF. Sur les solides hyperélastiques à compressibilité induite par l'endommagement. *C. R. Académie des Sciences de Paris*, 188866(Série II b) :p. 1–23, 1997.
- A. ANDRIYANA. *Définition d'une nouvelle grandeur predictive pour la durée de vie en fatigue des matériaux élastomères*. PhD thesis, Université de Nantes et Ecole Centrale Nantes, Novembre 2006.
- E.M. ARRUDA et M.C. BOYCE. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41 :389–412, 1993.
- X. AUBARD, P.A. BOUCARD, P. LADEVEZE et L MICHEL. Modeling and simulation of damage in elastomer structures at high strains. *Computers and structures*, vol. 80 :p. 2289–2298, 2002.
- M.F. BEATTY et S. KRISHNASWAMY. A theory of stress-softening in incompressible isotropic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 48 :p. 1931–1965, 2000.
- P. BERRIOT, H. MONTES, F. LEQUEUX, D. LONG et P. SOTTA. Evidence for the shift of the glass transition near the particles in the silica-filled elastomers. *Macromolecules*, vol. 35 :p. 9756–9762, 2002.
- J. BIKARD. *Un modèle de comportement visco-élastique plastique endommageable pour les élastomères chargés*. PhD thesis, Université de la méditerranée, Aix-Marseille II, 2002.
- A.F. BLANCHARD. Breakage of rubber-filler linkages and energy dissipation in stressed rubber. *Journal of Polymer Science*, vol. 14 :p. 355–374, 1954.

- W. BO, L. HONGBING et K. GYU-HO. A damage model for the fatigue life of elastomeric materials. *Mechanics of Materials*, vol. 34 :p. 475–483, mars 2002.
- O. BOKOBZA, L. ET RAPOPORT. Reinforcement of natural rubber. *Journal of Applied Polymer Science*, vol. 85 :p. 2301–2316, 2002.
- A. BOUKAMEL. *Modélisation mécanique et numérique des matériaux et structures en élastomères*. PhD thesis, Université de la Méditerranée, Octobre 2006.
- A. BOUKAMEL et S. MEO. Identification of the mechanical parameters linked to a visco-hyperelastic model: Application to a class of elastomers. *Second European Conference on Constitutive Models for Rubber*, 2001.
- A. BOUKAMEL, S. MEO, O. DEBORDES et M. JAEGER. A thermo-viscoelastic model for elastomeric behaviour and its numerical application. *Archive of Applied Mechanics*, 71 : 785–801, 2001.
- S. BOURGEOIS. Caractérisation d'élastomères en fatigue. Master's thesis, Université d'Aix-Marseille II, 1994.
- F. BUECHE. Molecular basis for the müllins effect. *Journal of Applied Polymer Science*, vol. 4 :p. 107–114, 1960.
- S. CANTOURNET. *Endommagement et fatigue des élastomères*. PhD thesis, Université de Pierre et Marie Curie, 2002.
- G. CHAGNON, E. VERRON, L. GORMET, G. MARCKMANN et CHARRIER P. On the relevance of continuum damage mechanics as applied to the mullins effect in elastomers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 324 :p. 1–23, decembre 2003.
- S. COURTOIS. Une approche physiquement motivé pour l'endommagement des élastomères. Master's thesis, Université d'Aix-Marseille II, 2003.
- F. DELORS-JUSTIN, N. BARROIS-LOUDIN, C. CARDINET, J. LACOSTE et J. LEMAIRE. Thermal ageing of acrylonitrile-butadiene copolymer. *Polymer Degradation and Stability*, 1999.
- R. DESMORAT, A. KANE, M. SEYEDI et J.P. SERMAGE. Two scale damage model and relatd numerical issues for thermo-mechanical high cycles fatigue. *European Journal of Mechanics*, 26 :p. 909–935, 2007.
- J. DIANI, M. BRIEU et J.M. VACHERAND. A damage directional constitutive model for mullins effect with permanent set and induced anisotropy. *European Journal of Mechanics*, 25 :p. 483–496, 2005.
- A. DORFMANN et R.W. OGDEN. A constitutive model for mullins effect with permatnent set in particle-reinforced rubber. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 41 :p. 1855–1878, 2004.

-
- C. GABRIELI. *Modélisation théorique et numérique du comportement viscoélastique d'élastomères sous sollicitations harmoniques*. PhD thesis, Université Aix-Marseille II, 1995.
- O.C. GARISHIN et V.V. MOSHEV. Damage model of elastic rubber particulate composites. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 38 :p. 63–69, 2002.
- A.N. GENT. Detachment of an elastic matrix from a rigid spherical inclusion. *Journal of Materials Science*, vol. 15 :p. 2884–2888, 1980.
- A.N. GENT et B. PARK. Failure processes in elastomers at or near a rigid spherical inclusion. *Journal of Materials Science*, vol. 19 :p. 1947–1956, 1984.
- S. GOKTEPE et C. MIEHE. A micro-macro approach to rubber-like materials. part iii : The micro-sphere model of anisotropic mullins-type damage. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53 :p. 2259–2283, 2005.
- S. GOVINDJEE et J. C. SIMO. A micro-mechanically based continuum damage model for carbon black-filled rubbers incorporating mullins's effect. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 39(1) :p. 87–112, 1991.
- S. GOVINDJEE et J. C. SIMO. Mullins' effect and the strain amplitude dependence of the storage modulus. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 29(14/15) :p. 1737–1751, 1992.
- E. GUTH. Theory of filler reinforcement. *Journal of Applied Physics*, vol. 16 :p. 20–25, 1945.
- J.C. HALPIN et F BUECHE. Fracture of amorphous polymeric solids : reinforcement. *Journal of Applied Physics*, vol. 35 :p. 3142–3149, 1964.
- M.L. JAZZAR. *Modélisation du comportement hyperélastique quasi-incompressible de structures acier-élastomères et validation expérimentale*. PhD thesis, Université Aix-Marseille II, 1993.
- L.M. KACHANOV. Time of the rupture process under creep conditions. *Izvestiia Akademia Nauk SSSR*, vol. 8 :p. 26–31, 1958.
- R. KIENZLER et G. HERRMANN. Fracture criteria based on local properties of the eshelby tensor. *Mechanics*, vol. 29 :p. 521–527, 2002.
- N. LAHELLEC. *Homogénéisation et étude expérimentale de composites hyperélastiques et visco-hyperélastiques*. PhD thesis, Université de la méditerranée, Aix-Marseille II, 2001.
- L. LAIARINANDRASANA, R. PIQUES et A. ROBISSON. Visco-hyperelastic model with internal state variable coupled with discontinuous damage concept under total formulation. *International journal of Plasticity*, vol. 19 :p. 977–1000, 2003.
- J. LAKE et P.B. LINDLEY. Ozone cracking, flex cracking and fatigue of rubber. *Rubber Journal*, vol. 146 :p. 24–30, 1964.
- J. LAKE et P.B. LINDLEY. The mechanical fatigue limit for rubber. *Journal of Applied Polymer Science*, vol. 9 :p. 1233–1251, 1965.

- J.-B. LE CAM, B HUNEAU, E VERRON et GORNET L. Mechanism of fatigue crack growth in carbon black filled natural rubber. *Macromolecules*, 37:p. 5011–5017, 2004.
- P. LE TALLEC et C. RAHIER. Numerical models of steady rolling for non-linear viscoelastic structures in finite deformations. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 37:1159–1186, 1994.
- J.L. LEBLANC. Rubber-filler interaction and rheological properties in filled compounds. *Progress in Polymer Science*, vol. 27:p. 627–687, 2002.
- K. LEGORJU-JAGO et C. BATHIAS. Fatigue initiation and propagation in natural and synthetic rubbers. *International Journal of Fatigue*, vol. 24:p. 85–92, 2002.
- J. LEMAITRE et J.L. CHABOCHE. *Mécanique des matériaux solides*. Sciences sup, 1985.
- J. LEMAÎTRE et J.L. CHABOCHE. *Mécanique des matériaux solides, 2nd Edition*. Dunod, Paris, 1996.
- X. LI, H.A. HRISTOV et A.F. YEE. Influence of cyclic fatigue on the mechanical properties of amorphous polycarbonate. *Polymer*, vol. 36(4):p. 759–765, 1995.
- A. LION. On the large deformation behaviour of reinforced rubber at different temperatures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 45:p. 1805–1834, 1997.
- A. LION. Thixotropic behaviour of rubber under dynamic loading histories: Experiments and theory. *Journal of Mechanics and physics of Solids*, vol. 46:p. 895–930, 1998.
- A. LION. Constitutive modelling in finite thermoviscoplasticity: a physical approach based on nonlinear rheological models. *International Journal of Plasticity*, vol. 16:p. 469–494, 2000.
- G. MARCKMANN, E. VERRON, L. GORNET, G. CHAGNON, P. CHARRIER et P. FORT. A theory of network alteration for the mullins effect. *Journal of the Mechanics and Physics of solids*, vol. 50:p. 2011–2028, 2002.
- W.V. MARS. *Multiaxial fatigue of rubber*. PhD thesis, University of Toledo, Aout 2001.
- W.V. MARS. Cracking energy density as a predictor of fatigue life under multiaxial conditions. *Rubber chemistry and technology*, pages p. 1–17, 2002.
- J.M. MARTINEZ. *Modélisation et caractérisation du comportement hyper-visco-plastique d'un élastomère sous sollicitations multi-harmoniques et à différentes températures*. PhD thesis, Université de la Méditerranée Aix-Marseille II, Avril 2005.
- J.M. MARTINEZ, A. BOUKAMEL, S. MEO et P. LEGENDRE. Approche multi-fréquentielle du comportement visco-élastique en grandes déformations des élastomères. *Journal de Physique*, vol. IV:p. 267–274, 2002.
- K. MATOUS, H.M. INGLIS, X. GU, D. RYPL, T.L. JACKSON et P.H. GEUBELLE. Multiscale modeling of solid propellant: From particle packing to failure. *Composites Science And Technology*, 67:p. 1694–1708, 2007.

-
- S. MEO. *Modélisation numérique du comportement mécanique de structures en élastomère : de l'élasticité à la thermo-visco-hyperélasticité*. PhD thesis, Université de la Méditerranée Aix-Marseille II, Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille, Décembre 2000.
- S. MEO, A. BOUKAMEL et O. DEBORDES. Analysis of a thermoviscoelastic model in large strains. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 80 :p. 2085–2098, 2002.
- C. MIEHE. Discontinuous and continuous damage evolution in ogden-type large-strain elastic materials. *European Journal of Mechanics*, vol. 14(5) :p. 697–720, 1995.
- C. MIEHE et J. KECK. Superimposed finite elastic-viscoelastic-plastoelastic stress response with damage in filled rubbery polymers. experiments, modelling and algorithmic implementation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 48 :p. 323–365, 2000.
- L. MULLINS. Effect of stretching on the properties of rubber. *Journal of Rubber Research*, vol. 16 :p. 275–289, 1947.
- L. MULLINS et N.R. TOBIN. Stress softening in rubber vulcanizates. i. use of a strain-amplification factor to describe the elastic behavior of filled-reinforced vulcanized rubber. *Journal of Applied Polymer Science*, vol. 9 :p. 2993–3009, 1965.
- R.W. OGDEN et D.G. ROXBURGH. An energy-based model of the mullins effect in filled rubber. *Proc. R. Soc. London*, vol. 455 :p. 2861–2877, 1999a.
- R.W. OGDEN et D.G. ROXBURGH. An energy-based model of the mullins effect. *Proceedings of ECCMR*, pages p. 23–28, 1999b.
- W. H. PARK, D. M. AND HONG, KIM S. G. et H. J. KIM. Heat generation of filled vulcanizates and its relationship with vulcanizate structures. *European Polymer Journal*, 2000.
- J. RAMIER. *Comportement mécanique d'élastomères chargés, influence de l'adhésion charge-polymère, influence de la morphologie*. PhD thesis, L'institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Mai 2004.
- R.S. RIVLIN et A.G. THOMAS. Rupture of rubber i. characteristic energy for tearing. *Journal of Polymer Science*, vol. 10 :p. 291–318, 1953.
- A. ROBISSON. *Comportement d'un élastomère SBR chargé de silice et d'un PU cellulaire : Prévion de la durée de vie en fatigue*. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris, Avril 2000.
- G. ROUSSELIER. Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture. *Nucl. Engn. Design*, vol. 105 :p. 97–11, 1987.
- N. SAINTIER. *Fatigue multiaxiale dans un élastomère de type NR chargé : Mécanisme d'endommagement et critère local d'amorçage de fissure*. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris, Avril 2001.
- N. SAINTIER, G. CAILLETAUD et R. PIQUES. Crack initiation and propagation under multiaxial fatigue in a natural rubber. *International Journal of Fatigue*, 28 :p. 61–72, 2006.

- F. SIDOROFF. The geometrical concept of intermediate configuration and elastic finite strain. *Arch. Mech.*, vol. 25 :p. 299–309, 1973.
- F. SIDOROFF. Variables internes en viscoélasticité, 3. milieux avec plusieurs configurations intermédiaires. *J. Méc.*, vol. 15 :p. 85–118, 1976.
- F. SIDOROFF. Cours sur les grandes déformations. *Ecole d'été, Sophia-Antipolis*, 1982.
- J. SIMO. On a fully three dimensional finite-strain viscoelastic damage model : formulation and computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 60 :p. 153–173, 1987.
- J. SIMO. Numerical analysis and simulation of plasticity. *Handbook of Numerical Analysis*, vol. 6 :p. 183–499, 1998.
- L.R.G. TRELOAR. The elasticity of a network of long chain molecules I. *Trans. Faraday Soc.*, 39 :36–64, 1943.
- E. VERRON et A. ANDRIYANA. Definition of a new predictor for multiaxial fatigue crack-nucleation in rubber. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Online, 2007.
- E. VERRON, J.B. LE CAM et L. GORNET. A multiaxial criterion for crack nucleation in rubber. *Mechanics Research Communications*, 33 :p. 493–498, 2005.

TABLE DES FIGURES

| | | |
|------|--|----|
| I.1 | Coupe d'un adaptateur de fréquence. | 9 |
| I.2 | Organisation spatiale des chaines polymériques | 11 |
| I.3 | Propriétés physiques et mécaniques en fonction de la densité de réticulation, BOUCHEREAU (1997) | 13 |
| I.4 | Evolution du module dynamique et de l'angle de perte en fonction de la température. | 14 |
| I.5 | Les différentes échelles de taille des charges | 15 |
| I.6 | Effet du taux de charges sur la rigidité d'un élastomère (HALPIN et BUECHE [1964]). | 16 |
| I.7 | Evolution de la réponse en cisaillement suivant le matériau pour un essai cyclique triangulaire d'amplitude 50% et de vitesse de déformation $0.15s^{-1}$, MARTINEZ [2005]. | 17 |
| I.8 | Essai expérimental mettant en évidence une partie dissipative non dépendante de la vitesse de déformation (MIEHE et KECK [2000]) | 18 |
| I.9 | Effet du taux de charges sur l'effet Payne d'après RAMIER [2004] | 19 |
| I.10 | Observation de l'influence de la température sur les essais cycliques triangulaires de double cisaillement tels que $\gamma_{max} = 50\%$ et $\dot{\gamma} = \pm 10s^{-1}$ | 20 |
| I.11 | Conditions limites dans les configurations initiale et actuelle. | 22 |
| I.12 | Courbe réponse d'un essai de traction sur éprouvette H2 | 26 |
| I.13 | Milieu à une configuration intermédiaire [SIDOROFF, 1973]. | 28 |
| I.14 | Différents modèles rhéologiques visco-élastiques | 29 |
| I.15 | Différents comportement plastique | 30 |
| II.1 | Endommagement discontinu (d'après CHAGNON <i>et al.</i> [2003]) | 35 |
| II.2 | Interprétations microscopiques de l'effet Mullins | 36 |
| II.3 | Observations au MEB des inclusions de silice dans un matériau endommagé (RO-BISSON [2000]) | 46 |
| II.4 | Observations au MEB des charges de carbone dans un matériau endommagé (SAIN-TIER [2001]) | 47 |

| | | |
|--------|---|----|
| II.5 | Représentation de la discrétisation du modèle de GARISHIN et MOSHEV [2002] | 49 |
| II.6 | Evolution du volume de la cavitation autour d'une particule sphérique | 51 |
| II.7 | Observations des mécanismes d'endommagement par fatigue dans un matériau chargé (SAINTIER [2001]) | 55 |
| II.8 | Evolution de la propagation de fissure pour différents types d'élastomères chargés plus ou moins finement(LAKE et LINDLEY [1964]) | 56 |
| II.9 | Effet de la fatigue sur le comportement global (MARS [2002]) | 57 |
| II.10 | Effet de la biaxialité sur la densité d'énergie de fissuration (MARS [2001]) | 57 |
| II.11 | Les différents paramètres influents sur la fatigue | 58 |
| II.12 | Effet de la présence de charges sur le comportement en fatigue (ALSHUTH et ABRAHAM [2002]) | 59 |
| II.13 | Effets de T_{max} sur le taux d'évolution d'une fissure (\times : SBR; \circ : NR) (LAKE et LINDLEY [1965]) | 63 |
| II.14 | Comparaison entre l'angle de rotation de la contrainte principale et l'angle de rotation matérielle (SAINTIER <i>et al.</i> [2006]) | 64 |
| III.1 | Observation de l'effet MULLINS à travers des essais de traction uniaxiale. | 71 |
| III.2 | Présentation des grandeurs caractéristiques d'un essai cyclique stabilisé. | 72 |
| III.3 | Evolution de la raideur et de la dissipation suivant l'amplitude de déformation pour une vitesse de cisaillement $\dot{\gamma} = \pm 0.3s^{-1}$ ($\gamma = \bar{F}_{12}$), réalisés à différentes températures. | 72 |
| III.4 | Evolution de la raideur et de la dissipation lors d'un essai DC, suivant la vitesse de déformation tels que $\gamma_{max} = 50\%$ ($\gamma = \bar{F}_{12}$), réalisés à différentes températures. | 73 |
| III.5 | Evolution du taux de relaxation, au cours d'un essai de relaxation suivant la température, en double cisaillement ($\gamma_{max} = 50\%$). | 73 |
| III.6 | Evolution de la raideur et de la dissipation suivant la température tels que $\dot{\gamma} = \pm 10s^{-1}$ réalisés à différentes amplitudes de déformation. | 74 |
| III.7 | Dimension des éprouvettes de traction | 75 |
| III.8 | Dimension des éprouvettes de double cisaillement | 75 |
| III.9 | Machine d'essai avec enceinte thermique | 76 |
| III.10 | Dispersion des résultats en traction | 77 |
| III.11 | Répétitivité des résultats | 78 |
| III.12 | Premier cycles d'adoucissement : Effet Mullins ou endommagement? | 79 |
| III.13 | Sollicitation et réponse d'un essai de caractérisation en traction à $\varepsilon_s = 15\%$ | 80 |
| III.14 | Réponses aux essais cycliques, en traction, pour les différentes configurations de fatigue | 80 |

| | |
|--|-----|
| III.15 Réponses aux essais de relaxation, en traction, pour les différentes configurations de fatigue | 81 |
| III.16 Courbes de fatigue, en cisaillement, à 12,5% d'amplitude dynamique (avec et sans pré-déformation) à 6Hz et 15Hz. | 82 |
| III.17 Courbes de fatigue, en cisaillement, à 25% d'amplitude dynamique (avec et sans pré-déformation) à 6Hz et 15Hz. | 83 |
| III.18 Courbes de fatigue, en cisaillement, à 50% d'amplitude dynamique à 6Hz et 15Hz | 83 |
| III.19 Fissures en fond de ménisque sur éprouvettes fatiguées non décollées | 84 |
| III.20 Fissures en fond de ménisque sur éprouvettes fatiguées jusqu'au décollement . . | 84 |
| III.21 Montage expérimental pour les éprouvettes de cisaillement | 85 |
| III.22 Evolution de la température durant 50000 cycles | 85 |
| III.23 Les trois types d'essais de caractérisation | 86 |
| III.24 Evolution des essais de caractérisation, en cisaillement, fatigués à 15Hz à $\pm 25\%$ | 87 |
| III.25 Evolution du comportement en cisaillement lors des essais fatigue à 50%, 6Hz. . | 88 |
| III.26 Réponses de la configuration de cisaillement, fatiguée à 6Hz. | 89 |
| III.27 Réponses de configuration de cisaillement fatiguée à 15Hz. | 89 |
| III.28 Réponses de la configuration de cisaillement fatiguée à 15Hz et à $\pm 25\%$ | 90 |
| III.29 Réponses de la configuration de cisaillement, fatiguée à 15Hz et à $12,5 \pm 25\%$. . | 90 |
| III.30 Réponses de la configuration de cisaillement, fatiguée à 6Hz à $\pm 25\%$ | 91 |
| III.31 Réponses de la configuration de cisaillement, fatiguée à 6Hz et à $12,5 \pm 25\%$. . | 91 |
| III.32 Evolution du comportement avec le nombre de cycles (essais de fatigue à 15Hz à $12,5 \pm 25\%$ | 92 |
| III.33 Evolution des grandeurs caractéristiques pour les essais fatigués en traction (+ : Fatigue à 10%, ✕ : Fatigue à 15% et * : Fatigue à 30%) | 93 |
| III.34 Evolution des grandeurs caractéristiques, cas des essais fatigués en cisaillement à $\pm 25\%$, à 15Hz | 93 |
| III.35 Evolution des grandeurs caractéristiques, cas des essais fatigués en cisaillement à $12,5 \pm 25\%$, à 15Hz | 94 |
| III.36 Evolution des grandeurs caractéristiques, cas des essais fatigués en cisaillement à $\pm 25\%$, à 6Hz | 94 |
| III.37 Evolution des grandeurs caractéristiques, cas des essais fatigués en cisaillement à $12,5 \pm 25\%$, à 6Hz | 95 |
| III.38 Mise en évidence d'une durée de vie limite N_{ultime} | 95 |
| IV.1 Généralisation à un modèle rhéologique étendu composé de N branches | 99 |
| IV.2 Généralisation à un modèle rhéologique étendu composé de N branches | 100 |
| IV.3 Modèles rhéologiques | 101 |

| | | |
|-------|---|-----|
| IV.4 | Modèle rhéologique discret composé de N branches pondérées | 102 |
| IV.5 | Modèle rhéologique statistique | 103 |
| IV.6 | Mise en évidence de la décohésion résiduelle entre charges et matrice lors d'un essai de traction dont la direction de sollicitation est donnée par les flèches (COURTOIS [2003]) | 106 |
| IV.7 | Les différentes échelles de l'élastomère VHDS E1029. | 107 |
| IV.8 | Motivations du modèle de comportement unitaire | 107 |
| IV.9 | Choix des comportements de chaque constituant | 108 |
| IV.10 | Choix des deux modèles unitaires de comportement | 109 |
| IV.11 | Passage du modèle discret au modèle de comportement statistique | 111 |
| IV.12 | Modèles de comportement statistique SHVP1 et SHVP1_PT. | 112 |
| IV.13 | Gradients de transformations nécessaires à la description du modèle SHVP1. | 112 |
| IV.14 | Forme de la densité de probabilité pour les modèles de comportement statistiques | 114 |
| IV.15 | Comparaison des charges/décharges quasi-statiques après 100 cycles pour différentes configurations d'essai | 115 |
| IV.16 | Pré-identifications des paramètres du modèle SHVP1 sur l'essais quasi-statique et l'essai de relaxation à amplitude de déformation croissante | 117 |
| IV.17 | Ajustement des paramètres du modèle SHVP1 sur les essais triangulaires à amplitude de déformation croissante à différents taux de déformation | 117 |
| IV.18 | Validation du modèle SHVP1 sur un essai de traction | 118 |
| IV.19 | Gradients de déformation nécessaires à la description du modèle SHVP1_PT. | 118 |
| IV.20 | Pré-identifications des paramètres du modèle SHVP1_PT sur l'essai quasi-statique et l'essai de relaxation à amplitude de déformation croissante | 121 |
| IV.21 | Ajustement des paramètres du modèle SHVP1_PT sur les essais triangulaires à amplitude de déformation croissante à différents taux de déformation | 122 |
| IV.22 | Validation du jeu de paramètres de référence du modèle SHVP1_PT sur un essai de traction | 122 |
| V.1 | Influence des paramètres C_1 et C_2 sur la réponse globale du modèle SHVP1_PT. | 127 |
| V.2 | Evolution de la fonction de pondération $P(\omega)$ et Influence du paramètre Ω sur la réponse globale du modèle SHVP1_PT. | 128 |
| V.3 | Comparaison modèle/expérience pour différents niveaux de fatigue à $50\% \pm 50\%$ | 130 |
| V.4 | Comparaison modèle/expérience pour différents niveaux de fatigue à $100\% \pm 100\%$ | 130 |
| V.5 | Comparaison modèle/expérience pour différents niveaux de fatigue à $150\% \pm 150\%$ | 130 |
| V.6 | Rappel du modèle SHVP1_PT | 131 |
| V.7 | Evolution de l'endommagement microscopique d | 132 |
| V.8 | Evolution de l'endommagement macroscopique D | 133 |

| | | |
|------|--|-----|
| V.9 | Evolution de $\text{Ln}\left(\frac{\delta d}{\delta N}\right)$ en fonction de $\text{Ln}(d)$ pour les différentes configurations (\square : après fatigue à $\pm 25\%$, $+$: après fatigue à $\pm 50\%$, \times : après fatigue à $\pm 100\%$, $*$: après fatigue à $\pm 150\%$). | 135 |
| V.10 | Evolution de $h(R_\mu)$ en fonction de $\text{Ln}(R_\mu)$ | 135 |
| V.11 | Evolution de $\text{Ln}\left(\frac{\delta d}{\delta N}\right)$ en fonction de $\text{Ln}(d)$ pour les différentes configurations (\square : après fatigue à $\pm 25\%$, $+$: après fatigue à $\pm 50\%$, \times : après fatigue à $\pm 100\%$, $*$: après fatigue à $\pm 150\%$). | 137 |
| V.12 | Evolution de $g(R_M)$ en fonction de $\text{Ln}(R_M)$ | 137 |
| V.13 | Géométrie de l'éprouvette simulée | 141 |
| V.14 | Répartition des grandeurs R_μ et R_M dans l'éprouvette DC | 141 |
| V.15 | Répartition de l'endommagement microscopique d dans l'éprouvette DC | 142 |
| V.16 | Répartition de l'endommagement macroscopique D dans l'éprouvette DC | 143 |
| V.17 | Comparaison entre courbes expérimentale et simulation EF de plusieurs cycles à 50% de déformation | 144 |
| 1 | Modèles de comportement statistiques SHVP1 et SHVP1_PT. | 145 |
| A.1 | Système de configurations. | 165 |
| A.2 | Description d'une décomposition polaire [SIDOROFF, 1982]. | 167 |
| A.3 | Etat de contrainte dans les différentes configurations. | 169 |
| A.4 | Conditions limites dans les configurations initiale et actuelle. | 170 |
| B.1 | Modèle rhéologique généralisé composé de N branches | 175 |
| B.2 | Modèle rhéologique étendu à une branche | 176 |
| C.1 | Evolution des essais de caractérisation fatigués à 15Hz à $\pm 25\%$ | 183 |
| C.2 | Evolution des essais de caractérisation fatigués à 15Hz à $12,5 \pm 25\%$ | 184 |
| C.3 | Evolution des essais de caractérisation fatigués à 6Hz à $\pm 25\%$ | 185 |
| C.4 | Evolution des essais de caractérisation fatigués à 6Hz à $12,5 \pm 25\%$ | 186 |
| E.1 | Données expérimentales issues d'un essai cyclique de double cisaillement. | 194 |
| E.2 | Traitement des courbes d'hystérésis. | 195 |
| E.3 | Algorithme itératif d'ajustement. | 196 |
| E.4 | Opérateur de Recherche Locale: RL | 197 |

LISTE DES TABLEAUX

| | | |
|-------|--|-----|
| I.1 | Enveloppe des sollicitations des adaptateurs des rotors principal et arrière. | 10 |
| I.2 | Tableau des égalités définissant l'objectivité d'une grandeur suivant la description extrait de LAHELLEC [2001] | 24 |
| III.1 | Grandeurs présentées pour l'analyse des essais expérimentaux. | 76 |
| III.2 | Correspondance entre déformations de fatigue et déformations seuil | 79 |
| III.3 | Durées de vie limites pour les configurations d'essais fatigués en cisaillement . . . | 95 |
| IV.1 | Différents modèles unitaires de comportement | 110 |
| IV.2 | Stratégie d'identification des paramètres de référence du modèle SHVP1 | 116 |
| IV.3 | Paramètres du modèle SHVP1, identifiés en deux étapes pour le cisaillement . . . | 116 |
| IV.4 | Stratégie d'identification des paramètres de référence du modèle SHVP1_PT . . | 120 |
| IV.5 | Paramètres du modèle SHVP1_PT identifiés en trois étapes pour le cisaillement | 121 |
| V.1 | Paramètres du modèles SHVP1_PT après des essais de fatigue à $50\% \pm 50\%$. . | 129 |

ANNEXE A

Thermodynamique appliquée aux grandes déformations

Avertissement :

L'objet de cette annexe est la mise en place d'un cadre thermodynamique, qui servira de référence tout au long de ce travail. Les formulations qui en résultent, doivent être suffisamment générales pour prendre en compte divers phénomènes mécaniques tels que l'hyper-élasticité, la plasticité, la visco-élasticité, l'incompressibilité ou l'endommagement et ce, en grandes déformations.

La rédaction de cette annexe a été largement inspirée par le travail de MEO [2000]. Nous invitons donc le lecteur désirant connaître plus de détails à consulter cet ouvrage.

- Sont donc présentées, les différentes grandeurs nécessaires à la formulation d'un problème en grandes déformations.
- Puis nous écrivons, dans ce cadre, les deux principes fondamentaux de la thermodynamique.
- Enfin, nous introduisons la notion d'état intermédiaire, notion majeure pour les développements réalisés dans ce travail. Un certain nombre de lois, dont la validité est vérifiée par des critères d'objectivité, sont alors déduites.

En résumé, ce qui suit explicite les hypothèses de travail et délimite le cadre de cette étude.

Formalisme des grandes déformations

Description du mouvement

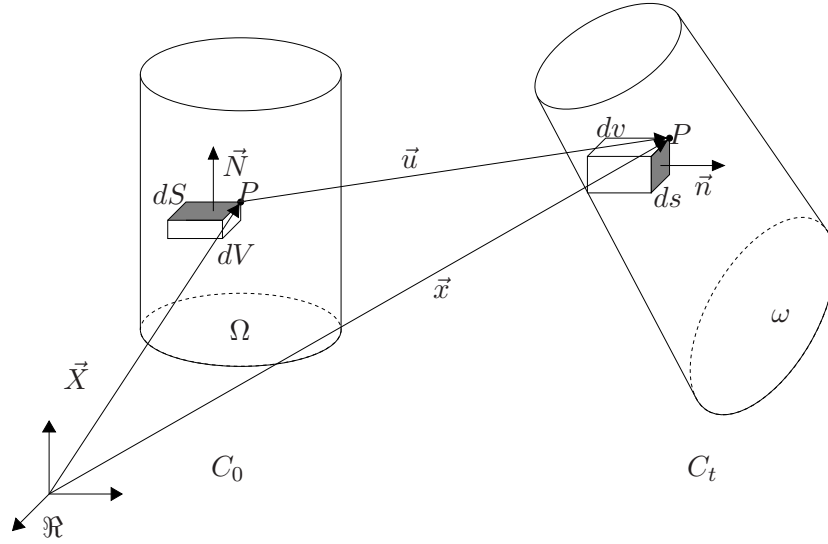


FIGURE A.1 – *Système de configurations.*

Soit un solide S évoluant dans un référentiel \mathfrak{R} . Il occupe le domaine Ω dans la configuration C_0 que nous considérons comme la configuration initiale. Il occupera à l'instant t le domaine ω dans la configuration C_t (cf. FIG. A.1).

En mécanique des solides, la configuration initiale du solide avant déformation est souvent choisie comme configuration de référence [SIDOROFF, 1982]. On peut définir une fonction \mathcal{K} , qui à la position \vec{X} d'une particule P dans C_0 , associe \vec{x} sa position dans C_t :

$$\mathcal{K} : \begin{cases} C_0 & \longrightarrow & C_t \\ \vec{X} & \longmapsto & \vec{x} = \mathcal{K}(\vec{X}, t) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

En introduisant \vec{u} , le vecteur déplacement, l'équation A.1 peut se mettre sous une forme équivalente :

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t). \quad (\text{A.2})$$

Expression des déformations

En vue de définir la transformation locale au voisinage de la particule P , on introduit classiquement l'application linéaire tangente $\bar{\bar{F}}$ associée à \mathcal{K} . Considérant un vecteur $d\vec{X}$ dans la configuration initiale, son image $d\vec{x}$ dans la configuration actuelle s'obtient par la relation :

$$d\vec{x} = \bar{\bar{F}} \cdot d\vec{X}, \quad (\text{A.3})$$

et de manière indicielle, en utilisant la relation A.2 :

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \delta_{ij}. \quad (\text{A.4})$$

$\bar{\bar{F}}$ (appelé aussi gradient de la transformation) traduit le "transport" de C_0 vers C_t . L'application linéaire tangente est localement inversible et conserve l'orientation, par conséquent :

$$J = \det(\bar{\bar{F}}) > 0. \quad (\text{A.5})$$

Au niveau local, les lois de transformation, liant un élément de volume dV ou de surface $\vec{N}dS$ de C_0 à leurs images respectives dv et $\vec{n}ds$ dans C_t , se déclinent comme suit :

$$dv = JdV, \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{n}ds = \begin{cases} (\text{Cof} \bar{\bar{F}}) \cdot \vec{N}dS \\ J\bar{\bar{F}}^{-T} \cdot \vec{N}dS. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Le tenseur gradient de la transformation $\bar{\bar{F}}$ décrit le mouvement local autour d'une particule. Il englobe aussi bien les rotations rigides que les déformations pures et ne constitue pas alors une bonne mesure des déformations. Aussi, faut-il utiliser des mesures qui ne rendent compte que des changements de forme du milieu c'est à dire qui ne traduisent que les variations de longueur et d'angle, soit pour deux vecteurs, les variations de leur produit scalaire.

Dès lors, on peut définir plusieurs déformations :

- soit par une définition directe qui détermine les tenseurs de dilatations ou de déformation directement à partir de $\bar{\bar{F}}$. C'est le cas des formulations classiques de déformations réalisées en configuration initiale et actuelle,
- soit par décomposition de $\bar{\bar{F}}$ telle que la décomposition polaire, utilisée ici, qui ne dépend que des configurations initiale et actuelle ou bien d'autre telle que par exemple la décomposition corotationnelle qui dépend de l'histoire des déformations.

Description lagrangienne des déformations

On considère $d\vec{X}$ et $d\vec{Y}$ deux vecteurs de la configuration C_0 , devenant $d\vec{x}$ et $d\vec{y}$ après déformation (dans C_t). On a :

$$\begin{aligned} d\vec{x} \cdot d\vec{y} &= (\bar{\bar{F}} \cdot d\vec{X}) \cdot (\bar{\bar{F}} \cdot d\vec{Y}) \\ &= d\vec{X} \cdot \bar{\bar{F}}^T \cdot \bar{\bar{F}} \cdot d\vec{Y} \end{aligned}$$

On note alors $\bar{\bar{C}}$ le tenseur des dilatations ou tenseur de CAUCHY-GREEN droit défini par :

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{F}}^T \cdot \bar{\bar{F}}. \quad (\text{A.8})$$

La variation de produit scalaire s'écrit alors telle que :

$$\vec{dx} \cdot \vec{dy} - d\vec{X} \cdot d\vec{Y} = d\vec{X} \cdot \left(\bar{\bar{F}}^T \cdot \bar{\bar{F}} - \bar{\bar{1}} \right) \cdot d\vec{Y}. \quad (\text{A.9})$$

On note ainsi $\bar{\bar{E}}$ le tenseur des déformations de GREEN-LAGRANGE défini par :

$$\bar{\bar{E}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{1}}). \quad (\text{A.10})$$

Description eulérienne des déformations

On définit alors de la même manière, dans la configuration actuelle, le tenseur de CAUCHY-GREEN gauche comme étant :

$$\bar{\bar{B}} = \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{F}}^T \quad \text{tel que} \quad d\vec{X} \cdot d\vec{Y} = \vec{dx} \cdot \bar{\bar{B}}^{-1} \cdot \vec{dy}. \quad (\text{A.11})$$

Le tenseur d'EULER-ALMANZI $\bar{\bar{A}}$ traduit alors la variation de produit scalaire, il est défini par :

$$\bar{\bar{A}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{1}} - \bar{\bar{B}}^{-1}). \quad (\text{A.12})$$

Décomposition polaire du tenseur gradient de transformation

Une autre manière d'introduire la notion de déformation est d'utiliser l'unique décomposition polaire de $\bar{\bar{F}}$ (car $\det(\bar{\bar{F}}) > 0$) :

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{V}} \cdot \bar{\bar{R}} = \bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{U}}, \quad (\text{A.13})$$

avec $\bar{\bar{V}}$, $\bar{\bar{U}}$ respectivement les tenseurs des déformations pures droit (en description lagrangienne) et gauche (en description eulérienne) – tous deux sont symétriques définis positifs – et $\bar{\bar{R}}$ le tenseur de rotation. La transformation est ainsi décomposée en deux étapes. Le passage de C_0 à C_t s'effectue par une rotation puis une déformation, ou l'inverse (*cf.* FIG. A.2).

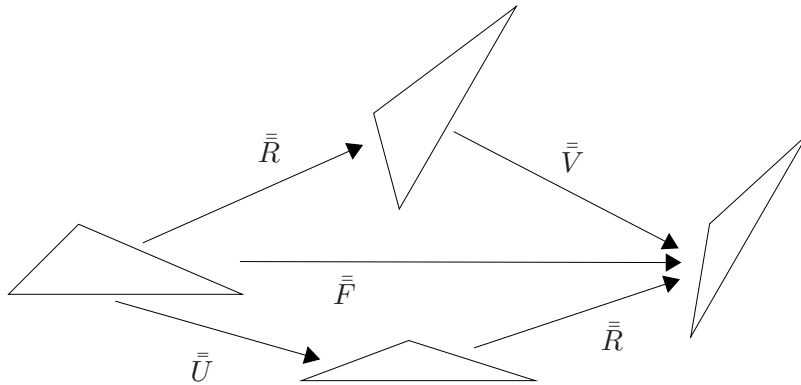


FIGURE A.2 – Description d'une décomposition polaire [SIDOROFF, 1982].

Vitesse de déformation

Pour caractériser les vitesses, on introduit le vecteur \vec{v} comme étant la dérivée par rapport au temps de $\vec{x}(\vec{X}, t)$. Si bien que pour \vec{dx} de C_t , on a :

$$\vec{dv} = \dot{\vec{dx}} = \dot{\vec{F}} \cdot d\vec{X} = \bar{\bar{L}} \cdot \vec{dx} \quad (\text{A.14})$$

L'équation A.14 montre bien que $\dot{\vec{F}}$ mesure la vitesse de déformation entre la configuration initiale et celle actuelle et il est donc possible de définir le tenseur gradient des vitesses $\bar{\bar{L}} = \dot{\vec{F}} \cdot \vec{F}^{-1}$.

La décomposition de $\bar{\bar{L}}$ en une partie symétrique et partie antisymétrique représentant respectivement la vitesse de déformation et le rotationnel du champ des vitesses permet de définir les tenseurs eulériens taux de déformation $\bar{\bar{D}}$ et de rotation $\bar{\bar{W}}$ de la transformation.

$$\bar{\bar{L}} = \bar{\bar{D}} + \bar{\bar{W}} \text{ avec } \begin{cases} \bar{\bar{D}} = \frac{1}{2} (\bar{\bar{L}} + \bar{\bar{L}}^T), \\ \bar{\bar{W}} = \frac{1}{2} (\bar{\bar{L}} - \bar{\bar{L}}^T). \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Si \vec{dx} et \vec{dy} sont deux vecteurs de C_t , il nous faut exprimer la dérivée par rapport au temps de leur produit scalaire. On a, en configuration eulérienne :

$$\frac{d}{dt}(\vec{dx} \cdot \vec{dy}) = 2\vec{dx} \cdot \bar{\bar{D}} \cdot \vec{dy}. \quad (\text{A.16})$$

On obtient de la même manière en configuration lagrangienne, avec $\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{F}}^T \cdot \bar{\bar{D}} \cdot \vec{F}$ le tenseur taux de déformation lagrangien confirmant que $\dot{\vec{E}}$ et $\bar{\bar{D}}$ sont les transportés l'un de l'autre :

$$\frac{d}{dt}(\vec{dx} \cdot \vec{dy}) = 2d\vec{X} \cdot \dot{\vec{E}} \cdot d\vec{Y}. \quad (\text{A.17})$$

Description des efforts

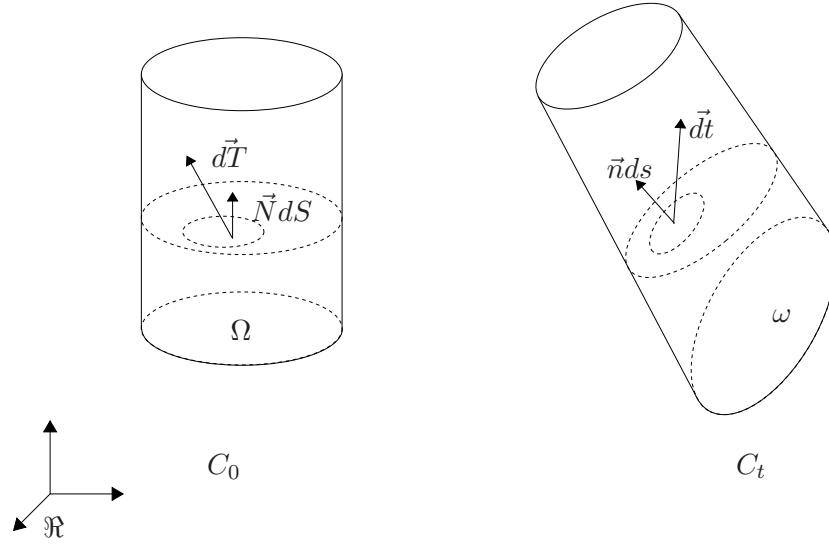
Trois descriptions peuvent être utilisées pour définir l'état de contrainte dans un solide, suivant que l'on considère les efforts intérieurs de cohésion dans la configuration actuelle ($d\vec{t}$, voir FIG. A.3) à travers un élément de surface déformé ($\vec{n}ds$) ou non déformé ($\vec{N}dS$), ou encore le transport des efforts de cohésion ($d\vec{T}$) à travers un élément de surface non déformé ($\vec{n}ds$). Ces approches définissent respectivement les descriptions **eulérienne**, **mixte** et **lagrangienne** [?].

Description eulérienne

Comme nous l'avons expliqué précédemment, on considère les efforts intérieurs de cohésion exercés par une partie du solide sur l'autre, à travers un élément de surface $\vec{n}ds$. On définit $\bar{\bar{\sigma}}$ le tenseur des contraintes de CAUCHY de façon analogue aux petites déformations comme étant :

$$d\vec{t} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n}ds. \quad (\text{A.18})$$

$\bar{\bar{\sigma}}$ (tenseur symétrique) représente donc les efforts de cohésion réellement exercés à travers un élément de surface déformée et par unité de surface déformée.

FIGURE A.3 – *Etat de contrainte dans les différentes configurations.*

Description mixte

Dans ce cas, on peut également lier les efforts intérieurs de cohésion dans la configuration actuelle, \vec{dt} , au transport de l'élément de surface $\vec{n}ds$ dans la configuration initiale noté $\vec{N}dS$.

$$\vec{dt} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot J \bar{\bar{F}}^{-T} \cdot \vec{N}dS,$$

Ainsi, le tenseur des contraintes associé à cette description est $\bar{\bar{\pi}}$ (tenseur non symétrique), le premier tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF :

$$\begin{cases} \bar{\bar{\pi}} = J \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\bar{F}}^{-T}, \\ \vec{dt} = \bar{\bar{\pi}} \cdot \vec{N}dS. \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

Tout comme $\bar{\bar{F}}$, $\bar{\bar{\pi}}$ n'est ni lagrangien, ni eulérien. On parle alors de description mixte. Physiquement, il représente les efforts de cohésion réellement exercés à travers un élément de surface déformée par unité de surface non déformée.

Description lagrangienne

L'obtention d'une description complètement lagrangienne de l'état de contrainte nécessite le transport de l'effort réel de cohésion \vec{dt} dans la configuration initiale non-déformée tel que :

$$\vec{dT} = \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \vec{dt} \quad (\text{A.20})$$

On introduit ainsi $\bar{\bar{S}}$ (tenseur qui n'a aucune signification physique mais présente la particularité d'être symétrique) le second tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF tel que :

$$\begin{cases} \bar{\bar{S}} = J\bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\bar{F}}^{-T} = \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{\bar{\pi}}, \\ d\vec{T} = \bar{\bar{S}} \cdot \vec{N} dS. \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Equations d'équilibre statique

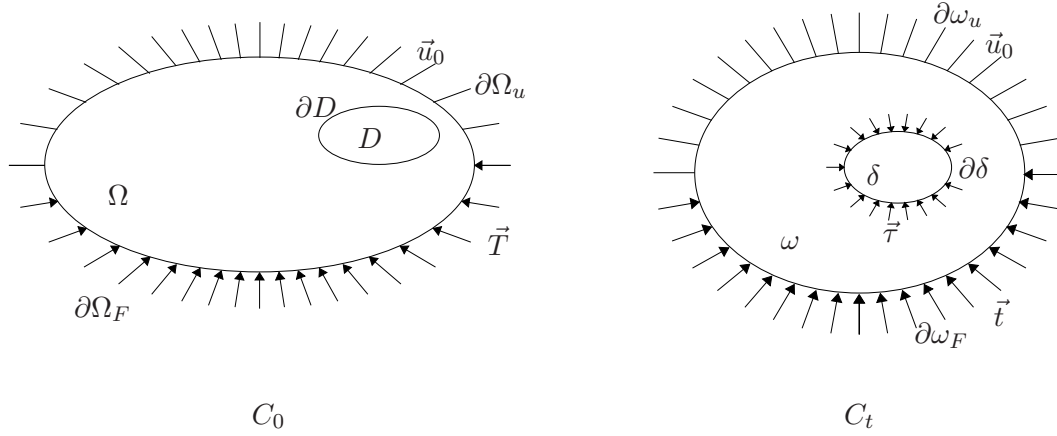


FIGURE A.4 – Conditions limites dans les configurations initiale et actuelle.

On définit dans la configuration actuelle (*cf.* FIG. A.4) par $\partial\omega$ la surface du domaine ω , $\partial\omega_u$ et $\partial\omega_F$ respectivement les sous domaines de $\partial\omega$ sur lesquels on applique un déplacement imposé \vec{u}_0 ou une densité surfacique de force par unité de surface déformée \vec{t} tels que $\partial\omega_u \cup \partial\omega_F = \partial\omega$ et $\partial\omega_u \cap \partial\omega_F = \emptyset$, δ un élément de volume dans la configuration déformée et $\vec{\tau}$ les efforts de cohésion exercés à travers l'élément de surface $\partial\delta$.

Dans la configuration initiale, $\partial\Omega$, $\partial\Omega_u$, $\partial\Omega_F$, D et ∂D sont respectivement les transportés de C_t vers C_0 par l'intermédiaire de $\bar{\bar{F}}^{-1}$ de $\partial\omega$, $\partial\omega_u$, $\partial\omega_F$, δ et $\partial\delta$. \vec{T} est la densité surfacique de force exprimée dans C_0 .

Formulation eulérienne

L'écriture de la **conservation de la quantité de mouvement**, traduisant dans la configuration actuelle, l'équilibre du sous domaine δ , donne :

$$\int_{\partial\delta} \vec{\tau} ds + \int_{\delta} \rho \vec{f} dv = \vec{0}, \quad (\text{A.22})$$

où ρ est la densité de masse par unité de volume dans la configuration actuelle et \vec{f} la densité massique de force.

On obtient dans la configuration actuelle, en utilisant le théorème de la divergence et après avoir

injecté la relation A.18 dans l'équation A.22, l'équation d'équilibre associée aux conditions limites suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x \bar{\sigma} + \rho \vec{f} = \vec{0} & \text{sur } \omega \\ \bar{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{t} & \text{sur } \partial\omega_F \\ \vec{u} = \vec{u}_0 & \text{sur } \partial\omega_u \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

Formulation lagrangienne

Si on note ρ_0 la densité de masse par unité de volume dans la configuration de référence, l'équation de la **conservation de la masse** et la relation A.6 nous donnent :

$$\rho dv = \rho_0 dV \text{ soit } \rho_0 = J\rho. \quad (\text{A.24})$$

En se servant des lois de transformation A.6 et A.7 pour changer les domaines d'intégration de A.22, il est alors possible d'écrire dans la configuration C_0 :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_X \bar{\pi} + \rho_0 \vec{f} = \vec{0} & \text{sur } \Omega \\ \bar{\pi} \cdot \vec{N} = \vec{T} & \text{sur } \partial\Omega_F \\ \vec{u} = \vec{u}_0 & \text{sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

Hypothèse des petites perturbations

L'hypothèse des petites perturbations consiste à supposer que le déplacement \vec{u} est faible, ainsi C_0 et C_t , \vec{X} et \vec{x} se confondent. On se place alors dans le cas où $\bar{\bar{F}}$ tend vers le tenseur unité, la déformation est alors caractérisée à des termes du second ordre près par :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \frac{1}{2}((\nabla u)^T + \nabla u) \\ \bar{\bar{C}} &\simeq \bar{\bar{B}} \simeq \bar{\bar{1}} + 2\bar{\varepsilon} \text{ et } \bar{\bar{E}} \simeq \bar{\bar{A}} \simeq \bar{\varepsilon} \end{aligned}$$

et $\bar{\sigma} \simeq \bar{\pi} \simeq \bar{\bar{S}}$. Les contraintes sont alors généralement désignées par le tenseur de CAUCHY vérifiant les équations d'équilibre et les conditions aux limites (*cf.* A.23).

ANNEXE B

Equations des modèles de comportement rhéologiques généralisés en grandes déformations

Avertissement :

Dans cette annexe, nous développons toutes les étapes nécessaires pour arriver aux lois constitutives d'un modèle rhéologique le plus général possible. Nous nous plaçons ici dans le cadre des grandes déformations en configuration eulérienne. Une attention particulière est alors portée sur l'objectivité des grandeurs utilisées. L'hypothèse d'un matériau isotrope, homogène et incompressible est faite. De plus, nous faisons ici un découpage des phénomènes thermiques et mécaniques afin d'écarter des développements les équations de couplage thermique. Nous considérons donc l'énergie libre et le pseudo-potentiel de dissipation indépendants de la température.

Position du problème

Dans cette annexe, nous nous positionnons en configuration eulerienne. Nous supposons que le comportement du matériau à modéliser est homogène et isotrope, et que le matériau est incompressible. De plus, pour faciliter l'écriture des équations nous supposons que les phénomènes thermiques et mécaniques sont découplés et ne nous intéressons dans cette annexe qu'à la partie mécanique du problème.

Tous modèles rhéologiques généralisés peuvent être schématiser par le modèle présenté sur la FIGURE B.1

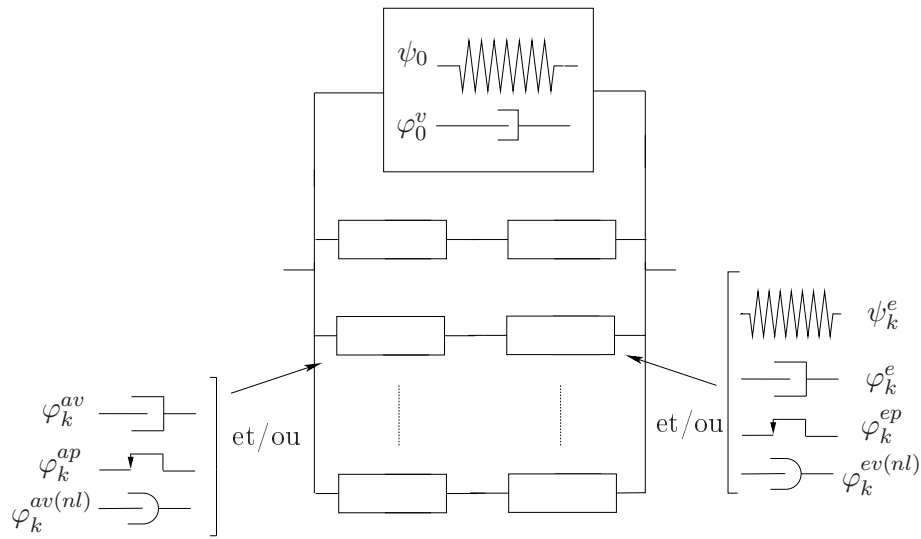


FIGURE B.1 – *Modèle rhéologique généralisé composé de N branches*

Equation d'un modèle unitaire

Dans un premier temps, nous allons définir les équations dans le cas d'un modèle de comportement élasto-dissipatif à une branche présenté sur la FIGURE B.2.

A partir de l'hypothèse d'existence de configurations intermédiaires (SIDOROFF [1973]), on décompose le gradient des déformations $\bar{\bar{F}}$ en deux sous gradients notés $\bar{\bar{F}}^a$ et $\bar{\bar{F}}^e$ tels que $\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{f}}^e \cdot \bar{\bar{f}}^a$. De plus, nous utilisons la décomposition polaire de $\bar{\bar{F}}^e$ telle que $\bar{\bar{f}}^e = \bar{\bar{v}} \cdot \bar{\bar{r}}$.

On définit par la même occasion les tenseurs de CAUCHY-GREEN gauches :

- $\bar{\bar{B}} = \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{F}}^T$,
- $\bar{\bar{b}}^e = \bar{\bar{f}}^e \cdot \bar{\bar{f}}^{eT}$
- et $\bar{\bar{b}}^a = \bar{\bar{f}}^a \cdot \bar{\bar{f}}^{aT}$

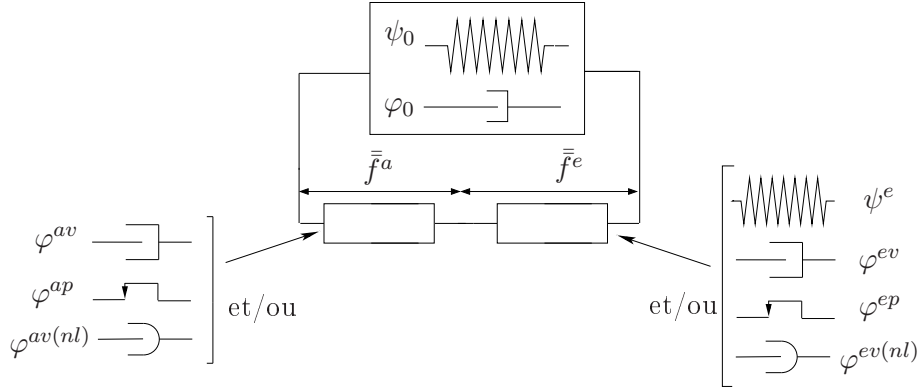


FIGURE B.2 – Modèle rhéologique étendu à une branche

Nous introduisons aussi les tenseurs taux de déformation $\bar{\bar{L}} = \dot{\bar{\bar{F}}} \cdot \bar{\bar{F}}^{-1} = \bar{\bar{D}} + \bar{\bar{W}}$ avec $\bar{\bar{D}}$ (partie symétrique de $\bar{\bar{L}}$) et $\bar{\bar{W}}$ (partie antisymétrique de $\bar{\bar{L}}$) respectivement le tenseur des vitesses de déformation et le rotationnel du champs des vitesses. On définit de même $\bar{\bar{d}}^e$ et $\bar{\bar{d}}^a$.

Dans le cas isotrope, l'énergie libre est une fonction isotrope des différentes variables. Elle prend ici la forme suivant :

$$\psi = \psi_0(\bar{\bar{B}}) + \psi^e(\bar{\bar{b}}^e) \quad (\text{B.1})$$

De même, le pseudo-potentiel de dissipation est composé par :

$$\varphi = \varphi_0(\bar{\bar{B}}) + \varphi^E(\bar{\bar{b}}^e) + \varphi^A(\bar{\bar{b}}^e) \quad (\text{B.2})$$

avec $\varphi^e(\bar{\bar{B}}^e) = \varphi^{ep}(\bar{\bar{b}}^e) + \varphi^{ev}(\bar{\bar{b}}^e) + \varphi^{ev(nl)}(\bar{\bar{b}}^e)$

et $\varphi^a(\bar{\bar{b}}^e) = \varphi^{ap}(\bar{\bar{b}}^a) + \varphi^{av}(\bar{\bar{b}}^a) + \varphi^{av(nl)}(\bar{\bar{b}}^a)$.

L'inégalité de CLAUSIUS-DUHEIM générale va prendre la forme suivante :

$$\phi = \underbrace{\bar{\sigma} : \bar{\bar{D}} - \rho \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}} : \dot{\bar{\bar{B}}}}_1 - \rho \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{b}}^e} : \dot{\bar{\bar{b}}^e}}_2}_{\phi^{\text{meca}}} - \underbrace{\rho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \frac{1}{T} \overrightarrow{\text{grad}}_x T \cdot \vec{q}}_{\phi^{\text{ther}}} \geq 0 \quad (\text{B.3})$$

On ne s'intéresse ici qu'à ϕ^{meca} .

• Développement de l'accolade 1 :

A partir de la définition de $\bar{\bar{B}}$, on a $\dot{\bar{\bar{B}}} = \dot{\bar{\bar{F}}} \cdot \bar{\bar{F}}^T + \bar{\bar{F}} \cdot \dot{\bar{\bar{F}}}^T$. Puisque $\dot{\bar{\bar{F}}} = \bar{\bar{L}} \cdot \bar{\bar{F}}$, on trouve :

$$\dot{\bar{\bar{B}}} = \bar{\bar{L}} \cdot \bar{\bar{B}} + \bar{\bar{B}} \cdot \bar{\bar{L}}^T. \quad (\text{B.4})$$

En remplaçant $\dot{\bar{B}}$ dans la partie 1 de l'équation B.3 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial \bar{B}} : \dot{\bar{B}} &= \frac{\partial \psi}{\partial \bar{B}} : (\bar{\bar{L}} \cdot \bar{\bar{B}} + \bar{\bar{B}} \cdot \bar{\bar{L}}^T) \\
&= \frac{\partial \psi}{\partial \bar{B}} : \bar{\bar{L}} \cdot \bar{\bar{B}} + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{B}} : \bar{\bar{B}} \cdot \bar{\bar{L}}^T \\
&= \bar{\bar{B}} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{B}} : \bar{\bar{L}}^T + \bar{\bar{B}}^T \frac{\partial \psi}{\partial \bar{B}} : \bar{\bar{L}}^T \quad (\text{par définition du produit doublement contracté}) \\
&= 2\bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{B}} : \bar{\bar{L}}^T \quad (\text{car } \bar{\bar{B}} \text{ est symétrique}) \\
&= 2\bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{B}} : \bar{\bar{D}} \quad (\text{puisque } \psi \text{ est fonction isotrope de } \bar{\bar{B}})
\end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{B}} : \dot{\bar{B}} = 2\bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{B}} : \bar{\bar{D}}$$

• Développement de l'accolade 2 :

$\dot{\bar{b}}^e$ n'étant pas une grandeur objective, la formulation obtenue à partir de ce tenseur ne vérifie pas le principe d'invariance des fonctions constitutives. L'idée de MEO *et al.* [2002] est de décrire $\dot{\bar{B}}^i$ en fonction de grandeurs objectives. On sait que $\bar{\bar{b}}^e = \bar{\bar{f}}^e \cdot \bar{\bar{f}}^{eT}$ et que $\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{f}}^e \cdot \bar{\bar{f}}^a$, on peut donc développer $\dot{\bar{b}}^e$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{b}}^e &= \dot{\bar{\bar{f}}}^e \cdot \bar{\bar{f}}^{eT} + \bar{\bar{f}}^e \cdot \dot{\bar{\bar{f}}}^{eT} \\
&= \dot{\bar{\bar{F}}} \cdot \bar{\bar{f}}^{-a} \cdot \bar{\bar{f}}^{-aT} \cdot \bar{\bar{F}}^T + \bar{\bar{F}} \cdot \dot{\bar{\bar{f}}}^{-a} \cdot \bar{\bar{f}}^{-aT} \cdot \bar{\bar{F}}^T + \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{f}}^{-a} \cdot \dot{\bar{\bar{f}}}^{-aT} \cdot \bar{\bar{F}}^T + \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{f}}^{-a} \cdot \bar{\bar{f}}^{-aT} \cdot \dot{\bar{\bar{F}}}^T \\
&= \underbrace{\dot{\bar{\bar{F}}} \cdot \bar{\bar{F}}^{-1}}_{\bar{\bar{L}}} \cdot \underbrace{\bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{f}}^{-a}}_{\bar{\bar{f}}^e} \cdot \underbrace{\bar{\bar{f}}^{-aT} \cdot \bar{\bar{F}}^T}_{\bar{\bar{f}}^{eT}} + \bar{\bar{F}} \cdot \dot{\bar{\bar{f}}}^{-a} \cdot \bar{\bar{f}}^{-aT} \cdot \bar{\bar{F}}^T + \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{f}}^{-a} \cdot \dot{\bar{\bar{f}}}^{-aT} \cdot \bar{\bar{F}}^T + \underbrace{\bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{f}}^{-a}}_{\bar{\bar{f}}^e} \cdot \underbrace{\bar{\bar{f}}^{-aT} \cdot \bar{\bar{F}}^T}_{\bar{\bar{f}}^{eT}} \cdot \underbrace{\bar{\bar{F}}^{-T} \cdot \dot{\bar{\bar{F}}}^T}_{\bar{\bar{L}}^T} \\
&= \bar{\bar{L}} \cdot \bar{\bar{b}}^e + \bar{\bar{B}}^e \cdot \bar{\bar{L}}^T + \bar{\bar{f}}^e \cdot \left(\frac{d(\bar{\bar{f}}^a \cdot \bar{\bar{f}}^{-a})}{dt} - \dot{\bar{\bar{f}}}^a \cdot \bar{\bar{f}}^{-a} + \frac{d(\bar{\bar{f}}^{-aT} \cdot \bar{\bar{f}}^{aT})}{dt} - \bar{\bar{f}}^{-aT} \cdot \dot{\bar{\bar{f}}}^{aT} \right) \cdot \bar{\bar{f}}^{eT} \\
&= \bar{\bar{L}} \cdot \bar{\bar{b}}^e + \bar{\bar{b}}^e \cdot \bar{\bar{L}}^T - \bar{\bar{f}}^e \cdot \left(\underbrace{\dot{\bar{\bar{f}}}^a \cdot \bar{\bar{f}}^{-a}}_{\bar{\bar{l}}^a} + \underbrace{\bar{\bar{f}}^{-aT} \cdot \dot{\bar{\bar{f}}}^{aT}}_{\bar{\bar{l}}^{aT}} \right) \cdot \bar{\bar{f}}^{eT} \\
&= \bar{\bar{L}} \cdot \bar{\bar{b}}^e + \bar{\bar{b}}^e \cdot \bar{\bar{L}}^T - 2\bar{\bar{f}}^e \cdot \bar{\bar{d}}^a \cdot \bar{\bar{f}}^{eT} \\
&= \bar{\bar{L}} \cdot \bar{\bar{b}}^e + \bar{\bar{b}}^e \cdot \bar{\bar{L}}^T - 2\bar{\bar{v}} \cdot \underbrace{\bar{\bar{r}} \cdot \bar{\bar{d}}^a \cdot \bar{\bar{r}}^{-1}}_{\bar{\bar{d}}_o^a} \cdot \bar{\bar{V}}
\end{aligned} \tag{B.6}$$

On obtient finalement :

$$\dot{\bar{b}}^e = \bar{\bar{L}} \cdot \bar{\bar{b}}^e + \bar{\bar{b}}^e \cdot \bar{\bar{L}}^T - 2\bar{\bar{v}} \cdot \bar{\bar{d}}_o^a \cdot \bar{\bar{v}} \tag{B.7}$$

On fait apparaître ici un nouveau tenseur $\bar{\bar{d}}_o^a$ qui définit la mesure eulerienne du taux de déformation relative à la transformation $\bar{\bar{f}}^a$ qui s'obtient de $\bar{\bar{d}}^a$ par rotation. Reste maintenant à calculer : $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{b}}^e} : \dot{\bar{\bar{b}}}^e$. En utilisant le fait que ψ soit une fonction isotrope de $\bar{\bar{b}}^e$, la même démarche que celle de l'équation B.5 ainsi que la définition du produit doublement contracté, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{b}}^e} : \dot{\bar{\bar{b}}}^e &= \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{b}}^e} : (\bar{\bar{L}} \cdot \bar{\bar{b}}^e + \bar{\bar{b}}^e \cdot \bar{\bar{L}}^T - 2\bar{\bar{v}} \cdot \bar{\bar{d}}_o^a \cdot \bar{\bar{v}}) \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{b}}^e} : (\bar{\bar{L}} \cdot \bar{\bar{b}}^e + \bar{\bar{b}}^e \cdot \bar{\bar{L}}^T) - 2 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{b}}^e} : \bar{\bar{v}} \cdot \bar{\bar{d}}_o^a \cdot \bar{\bar{v}} \\ &= 2\bar{\bar{b}}^e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{b}}^e} : \bar{\bar{D}} - 2\bar{\bar{v}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{b}}^e} \cdot \bar{\bar{v}} : \bar{\bar{d}}_o^a \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{b}}^e} : \dot{\bar{\bar{b}}}^e = 2\bar{\bar{b}}^e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{b}}^e} : \bar{\bar{D}} - 2\bar{\bar{v}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{b}}^e} \cdot \bar{\bar{v}} : \bar{\bar{d}}_o^a$$

Ainsi, si l'on se ramène à l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEIM, en utilisant les développements précédents, on obtient :

$$\begin{aligned} \phi^{\text{meca}} &= \left(\bar{\sigma} - 2\rho \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}} - 2\rho \bar{\bar{b}}^e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{b}}^e} \right) : \bar{\bar{D}} + 2\rho \left(\bar{\bar{v}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{b}}^e} \cdot \bar{\bar{v}} \right) : \bar{\bar{d}}_o^a \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\bar{D}}} : \bar{\bar{D}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\bar{d}}^e} : \bar{\bar{d}}^e + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\bar{d}}_o^a} : \bar{\bar{d}}_o^a \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$\bar{\bar{d}}^e$ doit être écrit fonction de variables objectives, c'est pourquoi on développe $\bar{\bar{l}}^e$ et on ne garde que la partie symétrique :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{d}}^e &= [\bar{\bar{l}}^e]_{\text{sym}} = [\dot{\bar{\bar{f}}}^e \cdot \bar{\bar{f}}^{-e}]_{\text{sym}} \\ &= [\dot{\bar{\bar{F}}} \cdot \bar{\bar{F}}^{-1}]_{\text{sym}} + [\bar{\bar{F}} \cdot \dot{\bar{\bar{f}}}^{-a} \cdot \bar{\bar{f}}^a \cdot \bar{\bar{F}}^{-1}]_{\text{sym}} = [\bar{\bar{L}}]_{\text{sym}} - \underbrace{[\bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{f}}^{-a}]_{\bar{\bar{f}}^e}}_{\bar{\bar{f}}^e} \cdot \underbrace{[\dot{\bar{\bar{f}}}^a \cdot \bar{\bar{f}}^{-a}]_{\bar{\bar{l}}^a}}_{\bar{\bar{l}}^a} \cdot \underbrace{[\bar{\bar{f}}^a \cdot \bar{\bar{f}}^{-1}]_{\bar{\bar{f}}^e}}_{\bar{\bar{f}}^e} \\ &= [\bar{\bar{L}}]_{\text{sym}} - [\bar{\bar{f}}^e \cdot \bar{\bar{l}}^a \cdot \bar{\bar{f}}^e]_{\text{sym}} \\ &= \bar{\bar{D}} - \bar{\bar{v}} \cdot [\bar{\bar{r}} \bar{\bar{l}}^a \cdot \bar{\bar{r}}]_{\text{sym}} \cdot \bar{\bar{v}}^{-1} = \bar{\bar{D}} - \bar{\bar{v}} \cdot \bar{\bar{d}}_o^a \cdot \bar{\bar{v}}^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation B.9(b) devient :

$$\begin{aligned} \phi^{\text{meca}} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\bar{D}}} : \bar{\bar{D}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\bar{d}}^e} : (\bar{\bar{D}} - \bar{\bar{v}} \bar{\bar{d}}_o^a \bar{\bar{v}}^{-1}) + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\bar{d}}_o^a} : \bar{\bar{d}}_o^a \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\bar{D}}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\bar{d}}^e} \right) : \bar{\bar{D}} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\bar{d}}_o^a} - \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\bar{d}}^e} \right) : \bar{\bar{d}}_o^a \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

A partir de cette nouvelle forme de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEIM, nous trouvons la loi de

comportement ainsi que la loi complémentaire du modèle unitaire général :

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = 2\rho\bar{B} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}} + 2\rho\bar{b}^e \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{b}^e} + \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{D}} + \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{d}^e} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{d}_o^a} = \bar{v} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{b}^e} \cdot \bar{v} + \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{d}^e} \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Passage aux modèles généralisés

Revenons au cas du modèle rhéologique à N branches, présentés sur la FIGURE. B.1, appelé aussi modèle généralisé. Au niveau de l'écriture des équations du modèle, la principale différence avec le modèle unitaire est le nombre de variables internes à prendre en compte. Le modèle unitaire dépend de deux variables internes \bar{B} et \bar{B}^e (sans prise en compte de la température), le modèle à N branches dépend de $N + 1$ variables : \bar{B} et les \bar{B}_k^e pour $k = 1..N$. L'énergie libre et le pseudo-potentiel de dissipation se décomposent en :

$$\begin{aligned} \psi &= \psi^0(\bar{B}) + \sum_{k=1}^N \psi_k^e(\bar{b}_k^e) \\ \varphi &= \varphi^0(\bar{D}) + \sum_{k=1}^N \varphi^e(\bar{d}_k^e) + \sum_{k=1}^N \varphi^a(\bar{d}_k^a) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

L'inégalité de CLAUSIUS-DUHEIM sur la partie mécanique prend alors les formes suivants :

$$\phi^{\text{meca}} = \bar{\sigma} : \bar{D} - \rho \frac{\partial\psi^0}{\partial\bar{B}} : \dot{\bar{B}} - \rho \sum_{k=1}^N \frac{\partial\psi_k^e}{\partial\bar{b}_k^e} : \dot{\bar{b}}_k^e \geq 0 \quad (\text{B.13})$$

Tous les développements que nous avons faits pour la branche dissipative du modèle unitaire peuvent être utilisés pour chaque branche k . Ainsi, nous retrouvons les trois résultats suivants à partir desquels sont dérivées la loi de comportement et les lois complémentaires régissant le modèle généralisé.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi^0}{\partial\bar{B}} : \dot{\bar{B}} &= 2\bar{B} \cdot \frac{\partial\psi^0}{\partial\bar{B}} : \bar{D} \\ \frac{\partial\psi_k^e}{\partial\bar{b}_k^e} : \dot{\bar{b}}_k^e &= 2\bar{b}_k^e \cdot \frac{\partial\psi_k^e}{\partial\bar{b}_k^e} : \bar{D} - 2\bar{v}_k \cdot \frac{\partial\psi_k^e}{\partial\bar{b}_k^e} \cdot \bar{v}_k : \bar{d}_{k_o}^a \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

où \bar{v}_k représente la dilatation pure de la décomposition polaire de \bar{f}_k^e telle que $\bar{f}_k^e = \bar{v}_k \bar{r}_k$ et où $\bar{d}_{k_o}^a = \bar{r}_k \bar{d}_k^a \bar{r}_k^{-1}$ est la mesure eulerienne du taux de déformation \bar{d}_k^a .

La loi de comportement d'un modèle généralisé et les N lois complémentaires régissant le

comportement dissipatif du modèle deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\bar{\sigma}} = 2\rho \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi^0}{\partial \bar{\bar{B}}} + 2\rho \sum_{k=1}^N \bar{\bar{b}}_k^e \cdot \frac{\partial \psi_k^e}{\partial \bar{\bar{b}}_k^e} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \varphi^0}{\partial \bar{\bar{D}}} + \frac{\partial \varphi_k^e}{\partial \bar{\bar{d}}_k^e} \\ \frac{\partial \varphi_k^a}{\partial \bar{\bar{d}}_{ko}^a} = \bar{\bar{v}}_k \cdot \frac{\partial \psi_k^e}{\partial \bar{\bar{b}}_k^e} \cdot \bar{\bar{v}}_k + \frac{\partial \varphi_k^e}{\partial \bar{\bar{d}}_k^e} \end{array} \right. \quad (\text{B.15})$$

ANNEXE C

Résultats expérimentaux de fatigue en cisaillement

Avertissement :

Cette annexe présente l'ensemble des résultats expérimentaux en fatigue que nous avons obtenus lors de la campagne expérimentale en cisaillement. Toutes les courbes ne pouvant être exposées dans le corps du texte, nous avons regroupé ici les résultats sur lesquels l'influence de la fatigue est présente.

Les courbes sont distinguées par leur configuration d'essais de fatigue. Ainsi nous présenterons l'évolution des 6 essais de caractérisation avec la fatigue pour les configurations suivantes :

- 15 Hz : 25% d'amplitude dynamique, sans amplitude statique,
- 15 Hz : 12,5% d'amplitude statique et 25% d'amplitude dynamique.
- 6 Hz : 25% d'amplitude dynamique, sans amplitude statique,
- 6 Hz : 12,5% d'amplitude statique et 25% d'amplitude dynamique.

Ces courbes permettent de mettre en évidence les mécanismes macroscopiques d'endommagement tels que les évolutions décroissantes de la raideur globale et de la dissipation qui nous amène à la construction des deux modèles de comportement.

Configuration d'essais à 15Hz

Essais fatigués à $\pm 25\%$ d'amplitude sans pré-déformation.

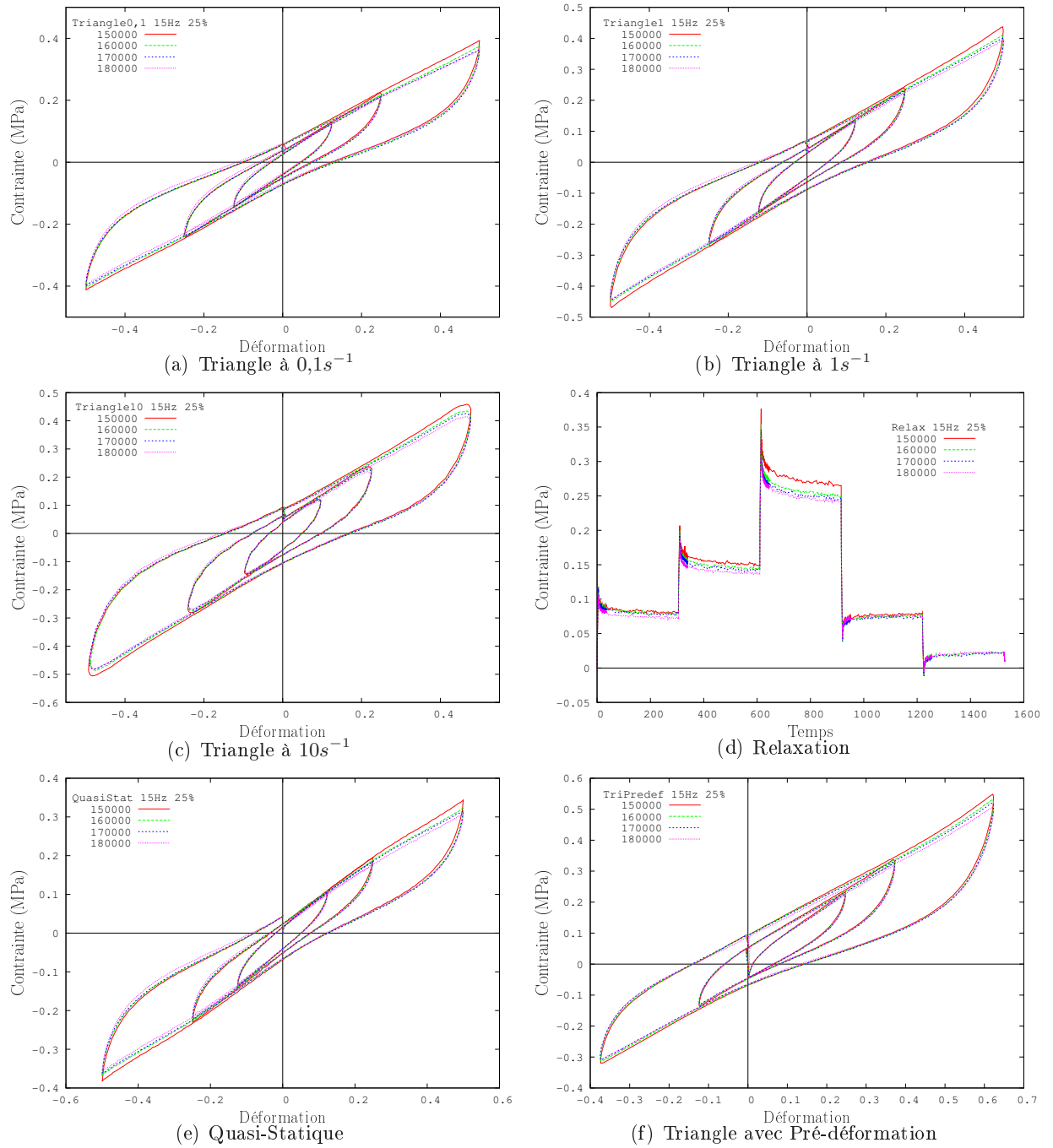
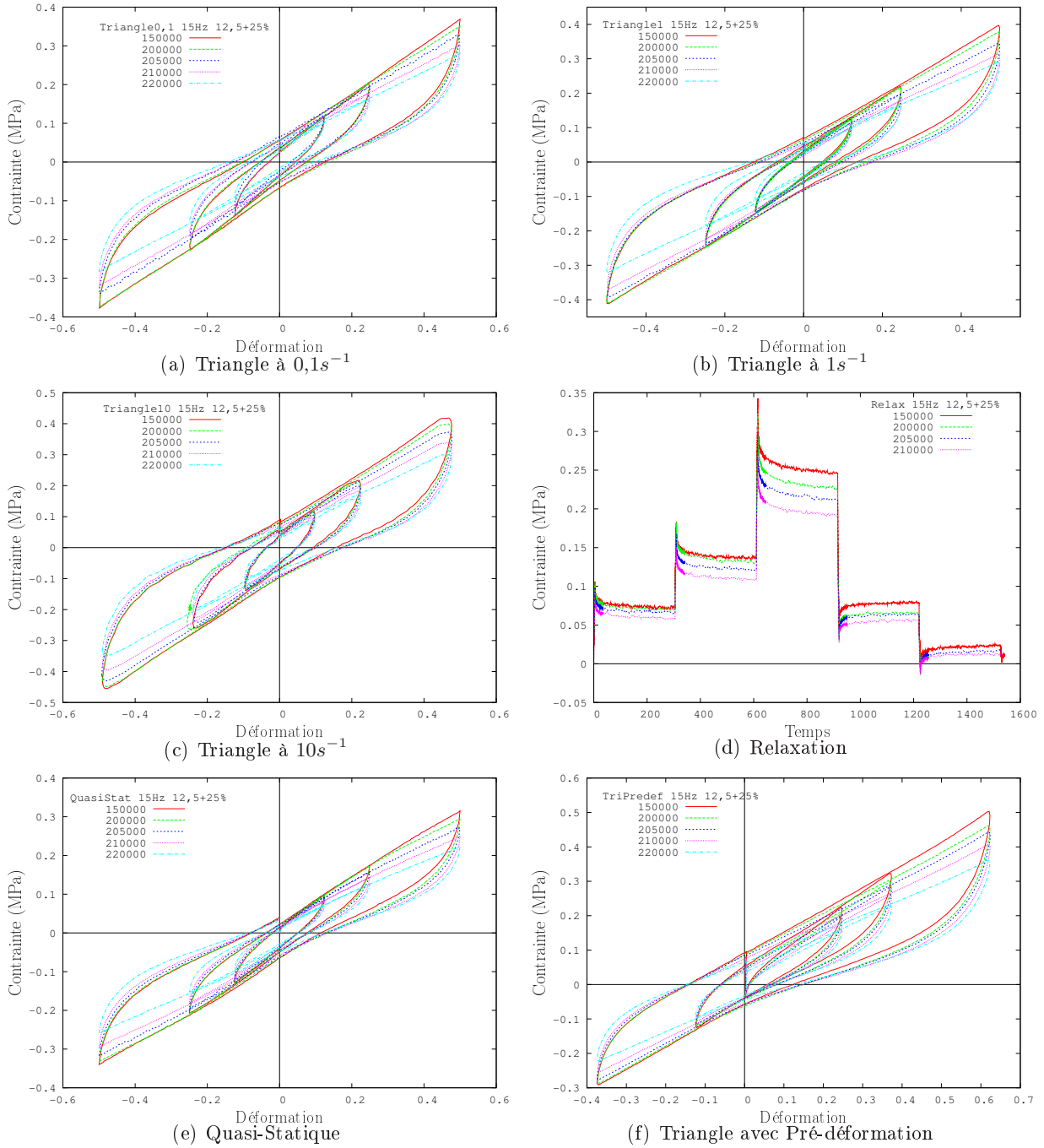


FIGURE C.1 – Evolution des essais de caractérisation fatigués à 15Hz à $\pm 25\%$

Essais fatigués à $12,5 \pm 25\%$ d'amplitude.FIGURE C.2 – Evolution des essais de caractérisation fatigués à 15Hz à $12,5 \pm 25\%$

Configuration d'essais à 6Hz

Essais fatigués à $\pm 25\%$ d'amplitude sans pré-déformation.

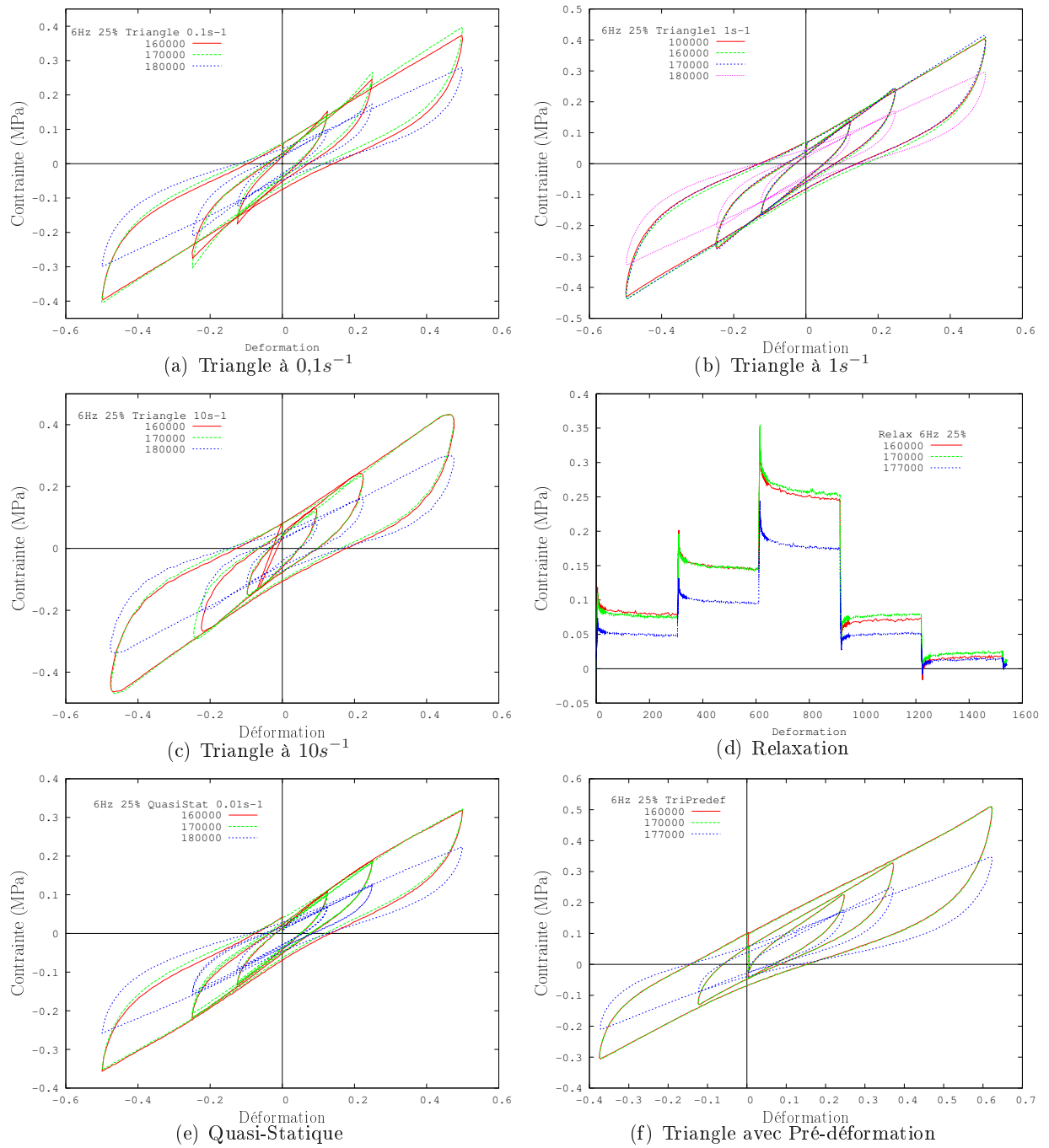
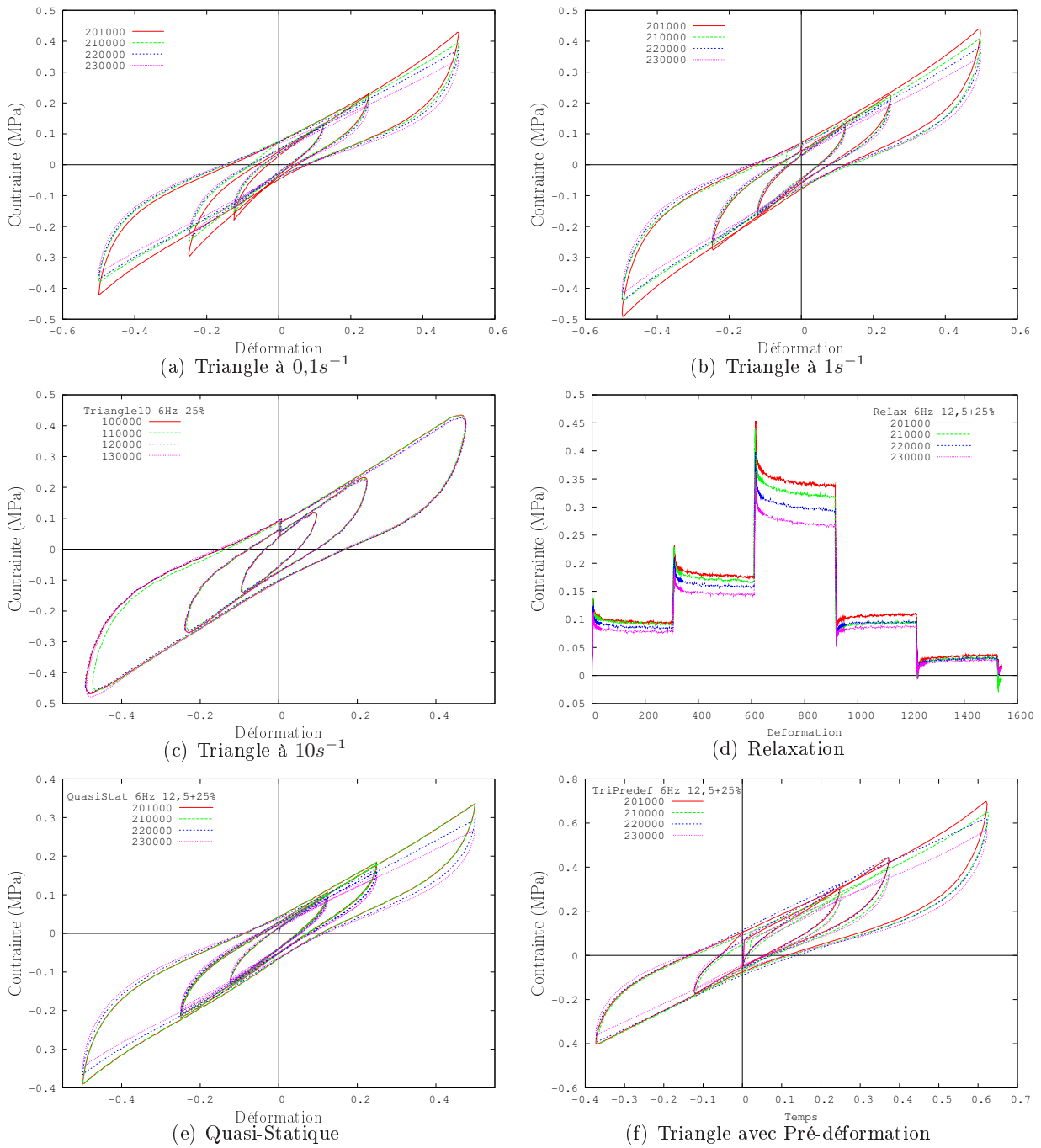


FIGURE C.3 – Evolution des essais de caractérisation fatigués à 6Hz à $\pm 25\%$

Essais fatigués à $12,5 \pm 25\%$ d'amplitude.FIGURE C.4 – Evolution des essais de caractérisation fatigués à 6Hz à $12,5 \pm 25\%$

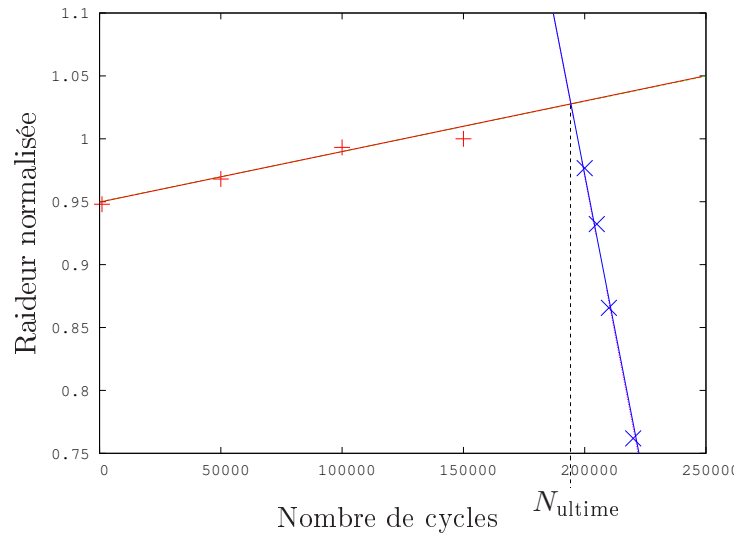
ANNEXE D

Mis en evidence d'une durée de vie ultime des éprouvettes de Double-Cisaillement

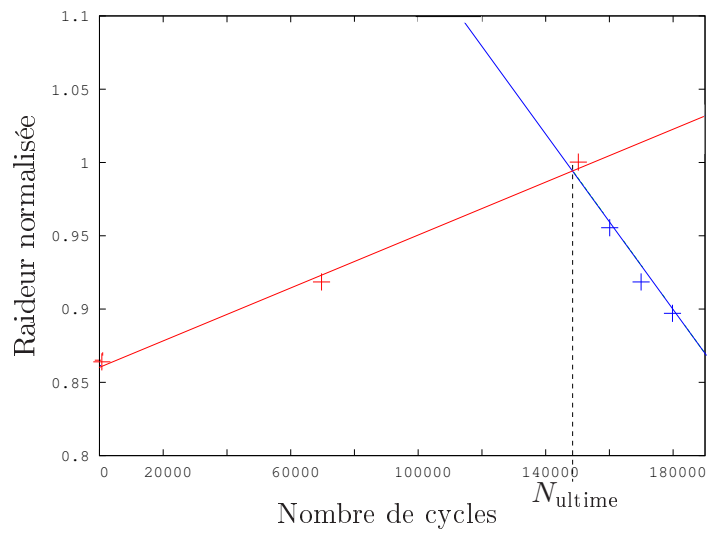
Avertissement :

Cette annexe présente l'évolution des raideurs normalisées en fonction des nombres de cycles en fatigue. Un ajustement linéaire de la rigidification puis de l'assouplissement, mis en évidence par ses courbes, permet de détecter un seuil (en nombre de cycles) à partir duquel le matériau est endommagé.

Configuration d'essais à 15Hz

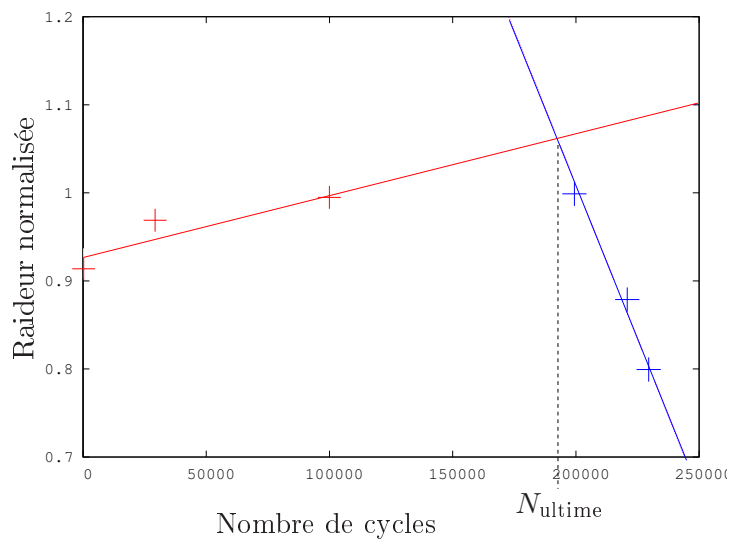


(a) Essai fatigué à 12,5 + 25%, à 15Hz

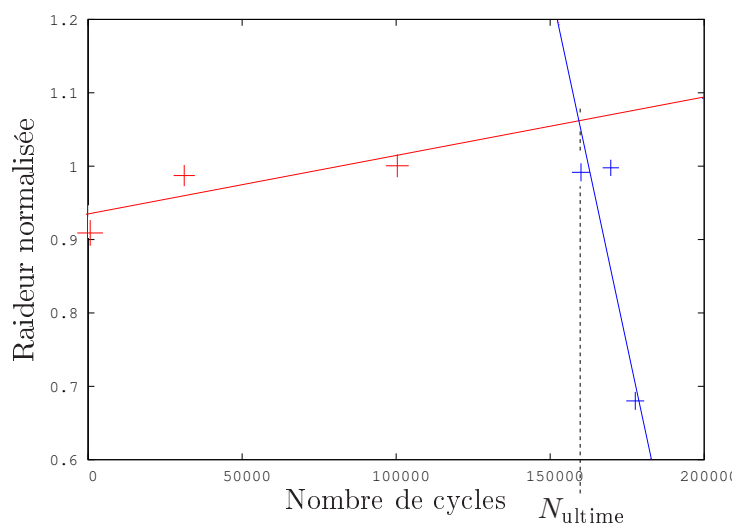


(b) Essai fatigué à 25%, à 15Hz

Configuration d'essais à 6Hz



(c) Essai fatigué à 12,5 + 25%, à 6Hz



(d) Essai fatigué à 25%, à 6Hz

ANNEXE E

Algorithme d'identification des paramètres des modèles de comportement

Avertissement :

Cette annexe présente l'algorithme d'identification des paramètres des modèles de comportement développé pour la caractérisation des paramètres de modèle de comportement statistique.

Hypothèses cinématiques

L'identification d'un modèle élasto-dissipatif consiste à déterminer le jeu de paramètres permettant de minimiser la distance, au sens des moindres carrés, entre :

- la réponse du modèle, déduite semi-analytiquement à l'aide du logiciel de calcul formel MATHEMATICA[®],
- et les résultats obtenus via des essais expérimentaux :
 - de double-cisaillement en relaxation ou sous chargement cyclique,
 - de traction uniaxiale en relaxation.

Cette réponse semi-analytique étant supposée homogène, on considère alors que le gradient global $\bar{\bar{F}}$ et du pseudo-gradient anélastique $\bar{\bar{F}}_a^{(1)}$ prennent les formes suivantes :

- **En cisaillement :**

$$\bar{\bar{F}} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{F}}_a = \begin{bmatrix} \gamma_{a1} & \gamma_a & 0 \\ 0 & \gamma_{a2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma_{a1}\gamma_{a2}} \end{bmatrix}.$$

- **Traction uniaxiale :**

$$\bar{\bar{F}} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_{a1}\lambda_{a2}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{F}}_a = \begin{bmatrix} \lambda_{a1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{a2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{a3} \end{bmatrix}.$$

La réponse du modèle en contrainte est ainsi déterminée en utilisant la loi de comportement, après l'intégration numérique des équations différentielles non-linéaires issues de la loi complémentaire.

Formes des données expérimentales

Le traitement des données expérimentales peut s'avérer différent selon la nature de l'essai considéré et du mode d'acquisition de la réponse, on distingue alors les réponses temporelles des réponses en hystérèse.

Réponses temporelles

Ainsi, lorsque la réponse expérimentale se présente sous forme de N_{exp} couples (Temps, Contrainte) de points expérimentaux par $(t_i^{exp}, \tau_i^{exp})$ (cf. E.1). Cet ensemble de point est ajusté par une courbe théorique définie par l'ensemble des points $(t_i^{mod}, \tau_i^{mod})$ sachant que $t_i^{exp} = t_i^{mod}$.

(1). tous les deux incompressibles

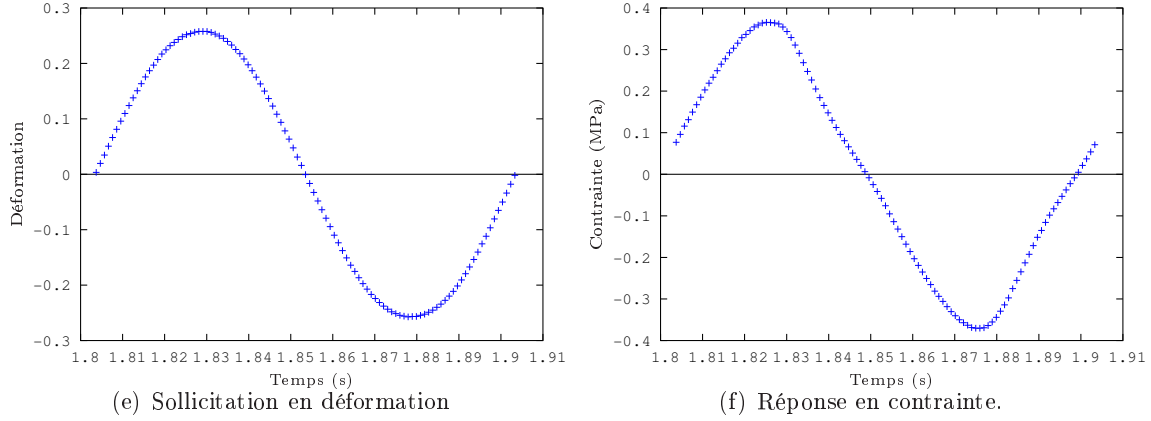


FIGURE E.1 – Données expérimentales issues d'un essai cyclique de double cisaillement.

Ainsi, en notant $\hat{\mathbf{X}}$ le vecteur composé des n paramètres du modèle à identifier, la distance des moindres carrés à minimiser s'écrit :

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{X}}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_{exp}} \left(\tau_i^{mod}(\hat{\mathbf{X}}) - \tau_i^{exp} \right)^2}. \quad (\text{E.1})$$

Réponse en hystérésis

Lorsque les données expérimentales se présentent sous forme de courbe d'hystérésis dans le plan (Déformations, Contraintes)⁽²⁾, on définit cette fois, les points expérimentaux par les $2 \times N$ couples (γ_i, τ_i) , avec :

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1 \dots N\} \\ \dot{\gamma}_i < 0 \quad \forall i \in \{N \dots 2N\} \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

L'hystérésis défini par ces $2 \times N$ couples n'étant pas bijective, il est préférable de décomposer les résultats expérimentaux en deux parties bijectives, soient (E.2) :

- la contrainte moyenne, à γ donnée, entre la descente ($\dot{\gamma} < 0$) et la montée ($\dot{\gamma} \geq 0$) :

$$t_i = \frac{\tau_i + \tau_{2N-i}}{2} \quad \forall i \in \{1 \dots N\}, \quad (\text{E.3})$$

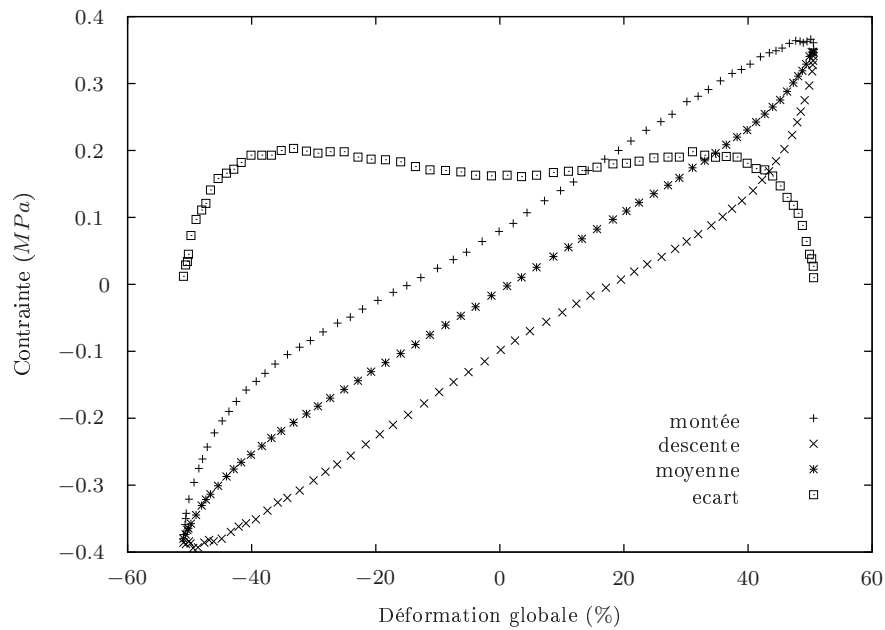
- la contrainte différentielle, à γ donnée :

$$d_i = \tau_i - \tau_{2N-i} \quad \forall i \in \{1 \dots N\}. \quad (\text{E.4})$$

L'identification des paramètres du matériau peut alors se ramener à la minimisation de l'écart entre les courbes expérimentales (γ_i, t_i) , (γ_i, d_i) et leurs homologues théoriques :

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{X}}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(t_i - t(\hat{\mathbf{X}}) \Big|_{\gamma_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(d_i - d(\hat{\mathbf{X}}) \Big|_{\gamma_i} \right)^2} \quad (\text{E.5})$$

(2). pour une réponse cyclique en cisaillement

FIGURE E.2 – *Traitement des courbes d'hystérésis.*

Algorithme de minimisation

La résolution du problème de minimisation de la distance des moindres carrés, définie précédemment, s'effectue, sans calcul de gradient, en adoptant un algorithme itératif de minimisation (*cf.* E.3) inspiré de la méthode de HOOKE & JEEVES et couplée à une procédure itérative de réduction de la variation. Le principe de cette méthode consiste à chercher de façon heuristique, à partir d'un point $\hat{\mathbf{X}}^0$, la direction et le pas permettant de diminuer \mathbf{E} . L'opérateur permettant cette diminution est appelée : l'opérateur de **Recherche Locale** détaillé sur la figure E.4⁽³⁾.

(3). $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_n)$ désignant la base canonique de \mathcal{R}^n .

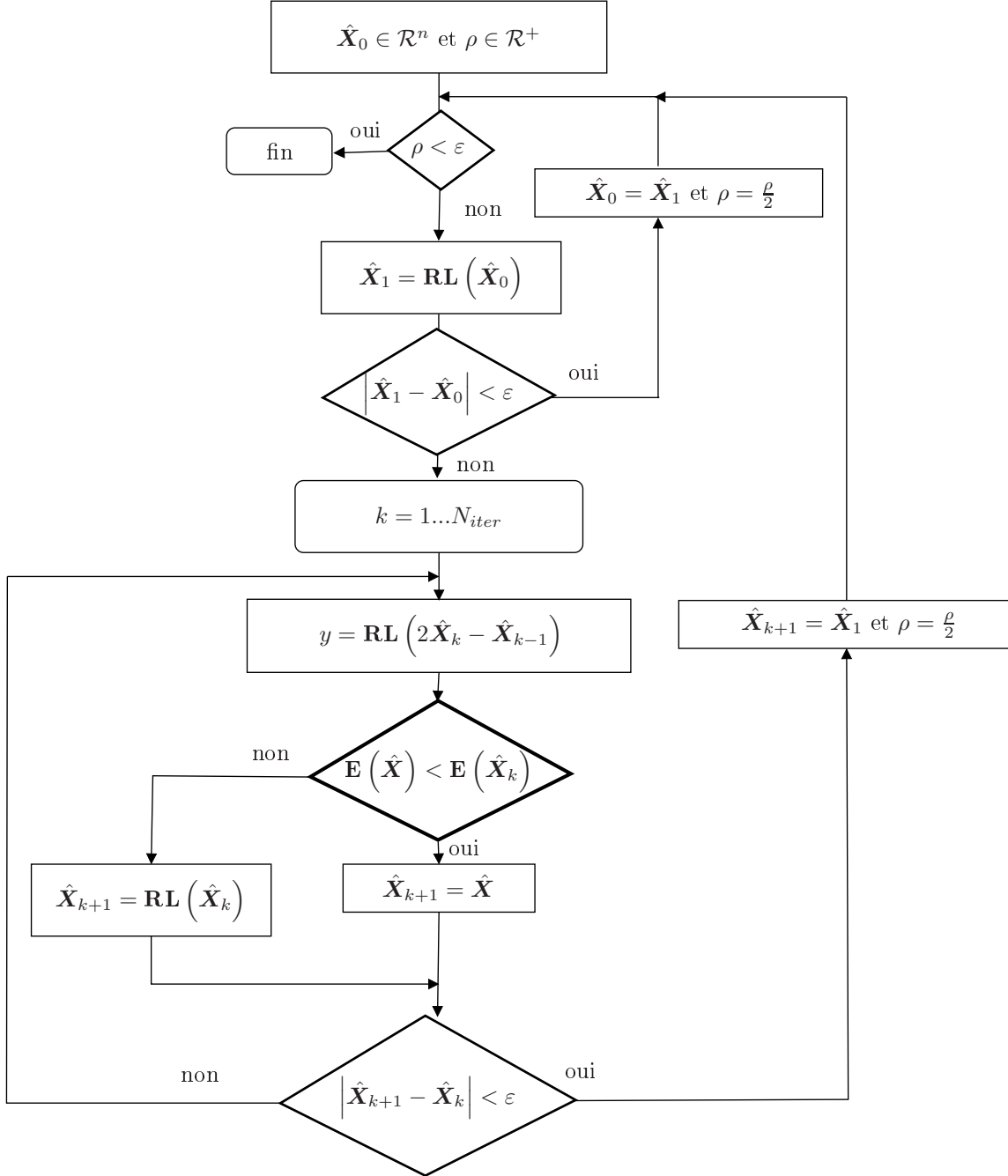
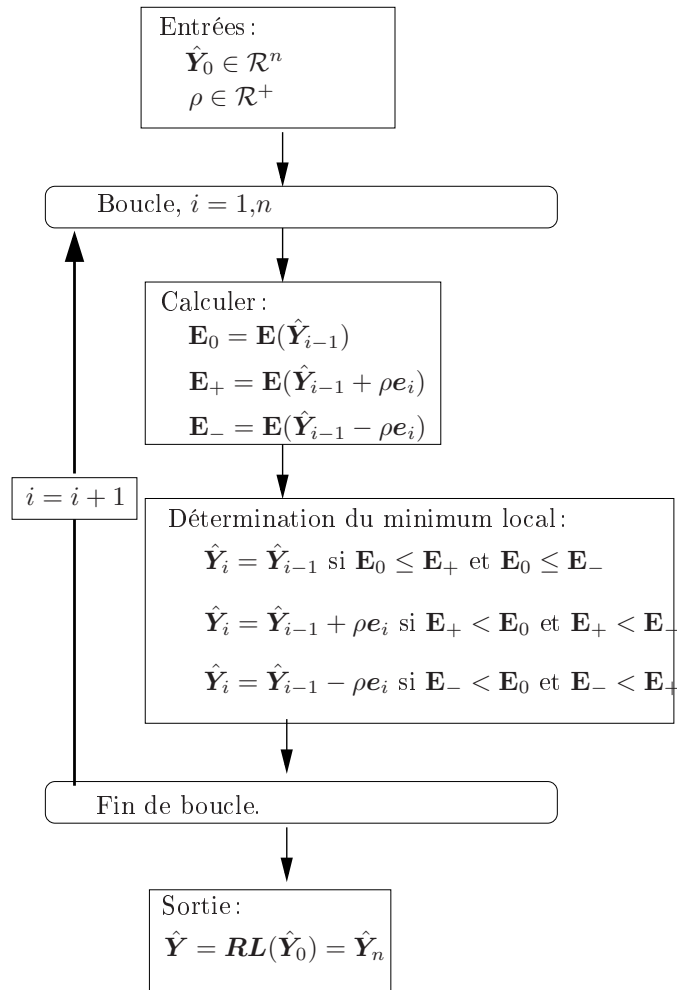


FIGURE E.3 – Algorithme itératif d'ajustement.

FIGURE E.4 – *Opérateur de Recherche Locale : \mathbf{RL} .*